

## Aðferðir til að auðkenna stefnuhneigð íss

Pröstur Þorsteinsson

Jarðvísindastofnun Háskólans, Háskóli Íslands

Vefútgáfa: 17. nóvember 2008

**Ágrip** – Fimm aðferðir til að auðkenna stefnuhneigð íss eru leiddar út fyrir keiluhornsdrifingu  $c$ -ása og bornar saman. Þegar dreifingin er ekki fullkomin keiluhornsdrifing, eins og ávallt er þegar um endanlegan fjölda kristalla er að ræða, gefa þessar aðferðir mismunandi gildi á keiluhorni fyrir sömu dreifingu  $c$ -ása. Til að meta hversu vel eða illa hver einstök aðferð hentar til útreikninga á flæði jökla er aflögunarhraði reiknaður út frá dreifingu stakra kristalla og borinn saman við hraða, sem reiknuð keiluhorn hverrar aðferðar gefa. Engin þessara aðferða hentar sérlega vel til reikninga á aflögunarhraða í samþjöppun þar sem dreifingin er langt frá því að vera keiluhornsdrifing. Hinsvegar hentar aðferðin, sem byggir á mældum hljóðhraða, ágætlega þegar um skeraflögun er að ræða.

### 1. Inngangur

Uppröðun kristalása í efnun getur haft mikil áhrif á flæðieiginleika þeirra og er ís gott dæmi um slíkt. Stakir ískristallar aflagast nær eingöngu vegna færslu ferilveilna (e. dislocation glide) í grunnfleti (e. basal plane), en aflögun á öðrum flötum (e. slip planes) er allt að  $\sim 100$  sinnum erfiðari (Duval og fleiri, 1983). Stefnuhneigð (e. anisotropy) veldur því að ís aflagast allt að 10 sinnum auðveldar í skerspennu ef  $c$ -ásar ískristallanna eru samsíða en þegar stefna þeirra er slembikennd (e. random) (Thorsteinsson, 2002). Til að reikna flæði í jöklum nákvæmlega er nauðsynlegt að þekkja vel þá þætti sem hafa áhrif á aflögunarhraða íss og er stefnuhneigðin einn af þeim þáttum.

Miklar framfarir hafa orðið í framsetningu flæðilögmáls fyrir jökulís á síðustu árum og munar þar mestu um að nú er farið að taka stefnuhneigðina með í reikninginn (van der Veen og Whillans, 1990; Alley, 1992; Lliboutry, 1993; Anandakrishnan og fleiri, 1994; Azuma, 1994; Azuma og Goto-Azuma, 1996; Castelnau og fleiri, 1996; Lliboutry og Duval, 1995; Gödert og Hutter, 1998; Morland og Staroszczyk, 1998; Staroszczyk og Gagliardini, 1999; Thorsteinsson, 2001, o. fl.).

Upplýsingar um breytileika stefnuhneigðar og þróun hennar, t.d. með dýpi í borkjarna og milli staða, eru mikilvægar til að skilja flæði stórra hveljökla og jökla almennt.

Þau ferli sem eiga sér stað í aflögun og flæði jökla eru einnig mikilvæg í tengslum við flæði bergs og í efnisfræði (e. material engineering). Viðfangsefni sem spanna sviðið frá þróun stefnuhneigðar í jöklum (Thorsteinsson og fleiri, 1999; Gow og fleiri, 1997; Azuma og Goto-Azuma, 1996), í möttli jarðar (Nicolas og Christensen, 1987; Chastel og fleiri, 1993; Kendall og Silver, 1996; Savage, 1999; Dawson og Wenk, 2000) og innri-kjarna jarðar (Karato, 1993), til viðbragða stóru hveljökla við hækun hitastigs á jörðu, krefjast öll þekkingar á þeim ferlum sem eiga sér stað við aflögun stakra ískristalla og áhrifa þeirra á flæði.

Stefnuhneigð íss er yfirleitt fengin með mælingum á þunnsneiðum úr ískjörnum, en einnig er mögulegt að mæla hljóðhraða (e. sonic velocity measurements) í borholu eða ískjarna (Bennett, 1968, 1972; Taylor, 1982; Thorsteinsson og fleiri, 1999).

Til að reikna flæði stefnuháðs íss er hægt að nota  $c$ -ása stefnur stakra kristalla, en það krefst  $2N$ -breyta, þar sem  $N$  er fjöldi kristalla og þekkja þarf bæði horn við lóðlínú  $\theta$  og áttarhorn  $\phi$ . Það gengur alveg að reikna þannig fyrir nokkur hundruð til þúsund kristalla, en ómögulegt, eða að minnsta kosti mjög seinlegt, er að ætla sér að reikna flæði jökla á þennan hátt. Þar að auki breytist stefnuhneigðin á nokkuð samfelldan hátt yfir megnið af rúmmáli jökla. Því er nauðsynlegt að geta auðkennt stefnuhneigð-

ina á einfaldan hátt, til dæmis með falli sem lýsir dreifingu  $c$ -ásanna með fáum breytum (e. Orientation Distribution Function, ODF).

Dæmi um slíka dreifingu er samhverf, lóðrétt, keiluhornsdreifing, þar sem allir  $c$ -ásar kristallanna eru jafndreifðir innan keiluhorns. Þessi dreifing er algeng í jöklum og sést einnig í tilraunum á rannsóknastofum (Budd og Jacka, 1989). Henni má lýsa með einni breytu, keiluhorninu  $\alpha$ .

Áhrif stefnuhneigðar, þar sem styrkur hennar var metinn með keiluhorni, á flæði á stórum skala nærri ísaskilum voru tekin með í reikninginn í Pettit og fleiri (2007). Áhrif stefnuhneigðar á lögun árlaga með dýpi (svokölluð „Raymond-bump“ undir ísaskilum) voru af sömu stærðargráðu og áhrif þess að flæðilögmálið er ólínulegt.

Thorsteinsson og fleiri (1999) notuðu keiluhorn til að meta styrk stefnuhneigðar og reikna aflögun borholunnar Dye 3 á Grænlandi, með flæðilögmáli sem er stefnuháð. Þannig var hægt að skýra um 75% af þeirri aflögun sem áður fékkst ekki skýrð með flæðilögmáli Glen (1958), sem er óháð stefnu (e. isotropic).

Í þessari grein berum við saman nokkrar aðferðir sem nota má til að ákvarða styrk stefnuhneigðar. Þær eru:

- ákvörðun keiluhorns (e. Cone Angle Fit, CAF)
- ákvörðun styrks stefnu ( $R$ )
- ákvörðun eigingildis ( $\mathbf{O}$ )
- ákvörðun aflögunarhraða ( $\dot{\epsilon}$ )
- ákvörðun hljóðhraða ( $V_p$ )

Fyrstu þrjár aðferðirnar byggja á gögnum frá þunn-sneiðum, það er stefnu stakra kristalla, en síðustu tvær byggja á eiginleikum fjaðrandi og seigra efna.

Hver þessara aðferða gefur gildi, sem við reiknum sem fall af dreifingu  $c$ -ása (ODF). Hér notum við keiluhornsdreifingu, þannig að ein breyta, keiluhornið  $\alpha$ , sýnir okkur styrk stefnuhneigðarinnar. Önnur form mætti líka nota

Þegar dreifing  $c$ -ásanna fylgir ekki nákvæmlega keiluhornsdreifingu, eða  $c$ -ásarnir eru endanlega margir, geta þessar mismunandi aðferðir gefið mismunandi gildi á styrk stefnuhneigðar, mismunandi  $\alpha$ , þrátt fyrir að þau séu reiknuð fyrir sömu dreifingu  $c$ -ása.

Markmiðið er því að bera aðferðirnar saman og meta hverjar lýsa styrk stefnuhneigðar best. Besta mat er hér skilgreint sem sú aðferð sem gefur aflögunarhraða sem er næstur þeim hraða sem reiknaður er frá

safni stöku kristallanna. Til að bera aðferðirnar saman, reiknum við aflögunarhraða sem fall af keiluhorni með greiningarlausn (e. analytical solution) sem lýst er í Thorsteinsson (2001) og út frá stefnu stöku kristallanna með líkani sem lýst er í Thorsteinsson (2002).

## 2. Aðferðir til að auðkenna stefnuhneigð

Nokkrar leiðir má fara til að reikna styrk stefnuhneigðar og hafa þær verið notaðar á margvíslegar dreifingar  $c$ -ása (t.d. Herron og fleiri, 1985). Þeim er lýst hér að neðan og leiddar út fyrir keiluhornsdreifingu.

Þessar mismunandi leiðir geta gefið ólík keiluhorn fyrir sömu dreifingu  $c$ -ása. Til að kanna hvaða leið hentar best til að auðkenna stefnuhneigðina þarf að finna hvaða leið gefur keiluhorn sem aftur gefur aflögunarhraða sem er sem næst hraða sem reiknast á grundvelli stakra kristalla.

Stefna sérhvers kristalls er tilgreind með hornunum  $\theta$  og  $\phi$ , eða stefnuvigrin  $\mathbf{n}$ ,

$$\mathbf{n} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}}_1 + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{x}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (1)$$

þar sem  $\hat{\mathbf{x}}_j$  eru grunnvigrar hornrétts hnitakerfis (e. orthonormal basis vectors).

Dreifing  $c$ -ása er gjarnan sýnd á punktagrafi (e. equal-area Schmidt-plot), en þá er stefnu hvers  $c$ -áss varpað á  $xy$ -flöt með jafnflatarmáls vörpuninni (Kocks, 1998, p. 54),

$$\rho = 2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad (2)$$

og

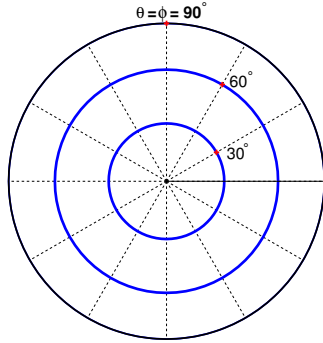
$$x_n = \rho \cos \phi, \quad y_n = \rho \sin \phi. \quad (3)$$

Þessi vörpun tekur alla punkta á efra hveli (e. upper hemisphere) og varpar þeim innan hrings með geisla  $r = \sqrt{2}$  í  $x$ - $y$  planinu. Punktagraf fæst þá einfaldlega með að setja merki fyrir hvern kristal í  $(x_n, y_n)$  eins og sýnt er á mynd 1.

Til að reikna hraða í gegnum safn kristalla þarf að skilgreina dreififall (ODF),  $F(\theta, \phi)$ . Öll slík ODF föll verða að uppfylla,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} F(\theta, \phi) d\theta d\phi = 1. \quad (4)$$

Þrjár dreifingar  $c$ -ása, keiluhorns-, flöt- og kósínus-dreifing og tilheyrandi dreififöll eru sýnd á mynd 2 sem fall af  $\theta$ . Keiluhornsdreifing hefur jafnan fjölda kristalla á flatarmálseiningu yfir kúluyfirborðið frá



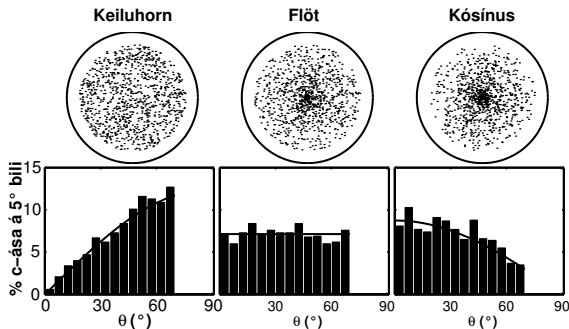
**Mynd 1.** Punktgraf, Schmidt graf. Hver einstakur kristallur á sér einn punkt. Staðsetning ræðst af vikhorni við lóðlínu  $\theta$ , og áttarhorni  $\phi$ . Líta má á bláu hringina sem keiluhorn  $\alpha$  (fyrir lóðréttan samhverfuás) af sömu stærð og hornið  $\theta$ .

lóðréttu út að keiluhorninu  $\alpha$ . Flöt dreifing hefur jafnan fjölda kristalla fyrir hvert bil,  $\Delta\theta$ , þannig að þéttleikinn er mestur við lóðrétt og þriðja tegund dreifingar  $c$ -ása sem við notum, kósínusdreifing, er eins og nafnið gefur til kynna kósínusfall af horni við lóðlínu og hefur flesta kristalla nærri lóðréttu. Keiluhornsdreifing er sínusfall.

Með því að bera þessar aðferðir saman á sameiginlegum grunni getum við séð hversu vel hver þeirra hentar til að lýsa áhfrifum dreifingar  $c$ -ása á aflögun stefnuháðs efnis.

## 2.1. Mælingar á hljóðhraða, $V_P$

Með mælingum á hljóðhraða (e. sonic velocity) í borholum fæst meðalhraði í efninu milli tveggja punkta. Hér fylgjum við útleiðslu Bennett (1968), en sam-



**Mynd 2.** Keiluhorn-, flöt- og kósínus-dreifing  $c$ -ása á punktgrafi og dreifing  $c$ -ása sem fall af horni frá lóðlínu. Heila línan sýnir fræðilega dreifingu. Frávik eru vegna endanlegs fjölda kristalla í sýninu.

kvæmt henni er hraði flatarbylgju (e. plane wave) í stökum kristalli einungis háður stefnuhorninu  $\phi$  (e. propagation angle). Fyrir safn kristalla er hraðinn háður dreifingu  $c$ -ásanna, stefnuhneigðinni, og stefnuhorninu.

Hljóðhraða má nýta til að meta styrk stefnuhneigðar þar sem hann er háður dreifingu  $c$ -ásanna. Hægt er að reikna út keiluhorn sem samsvarar mældum hraða. P-bylgju hraðamælingar eru gerðar í borholum ískjörnum. Þær gefa upplýsingar sem túlka verður út frá gefnum hugmyndum um dreifingu  $c$ -ásanna.

### 2.1.1. Stakir kristallar

Andhverfa hraða hljóðbylgju í stökum kristalli er,

$$s_P^c(\theta, \phi, \varphi) = (a_1 - b_1 + c_1) + (8b_1 - 2c_1) \cdot (\sin\phi \sin\theta \cos\phi + \cos\phi \cos\theta)^2 - 8b_1(\sin\phi \sin\theta \cos\phi + \cos\phi \cos\theta)^4, \quad (5)$$

þar sem  $\theta$  og  $\phi$  eru vikhorn frá lóðlínu og áttarhorn og  $\varphi$  er stefnuhorn hljóðbylgju frá lóðlínu. Við hitastig  $T = -10^\circ\text{C}$  og eðlismassa  $\rho = 917 \text{ kg m}^{-3}$ , er  $a_1 = 256.28 \mu\text{s m}^{-1}$ ,  $b_1 = 5.92 \mu\text{s m}^{-1}$ , og  $c_1 = 5.08 \mu\text{s m}^{-1}$  (Bennett, 1968).

Andhverfa hraðans fyrir safn kristalla, fæst þá með heildinu,

$$s = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} s^c(\theta, \phi, \varphi) F(\theta, \phi) d\theta d\phi. \quad (6)$$

Jöfnur (4 – 6) gera okkur kleift að reikna hraða fyrir mismunandi ODF. Hér að neðan reiknum við hraða fyrir keiluhornsdreifingu.

### 2.1.2. Hraði $V_P$ fyrir keiluhornsdreifingu

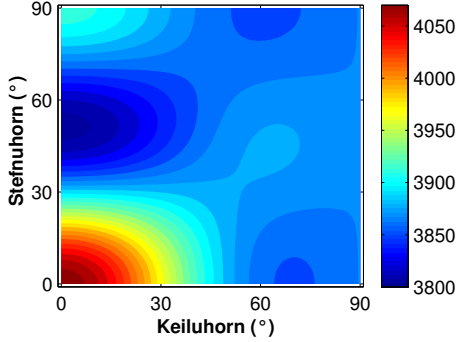
Í keiluhornsdreifingu (mynd 2) eru horn allra  $c$ -ása frá lóðlínu  $\theta$  milli  $0^\circ$  og  $\alpha$  og áttarhornin  $\phi$  eru jafndreifð milli  $0^\circ$  and  $360^\circ$ . ODF (jafna 4) er þá,

$$F(\theta, \phi) = \frac{\sin\theta}{2\pi(1 - \cos\alpha)}, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

Sértilfellið stefnusnaður ís ( $\alpha = 90^\circ$ ) gefur  $F(\theta, \phi) = \sin\theta/(2\pi)$ .

Andhverfa hraðans er

$$s(\alpha, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha s^c(\phi, \theta, \varphi) \frac{\sin\theta}{2\pi(1 - \cos\alpha)} d\theta d\phi, \quad (8)$$



**Mynd 3.** P-bylgjuhraði í ís sem fall af keiluhorni  $\alpha$  og stefnuhorni  $\varphi$ .

sem gefur

$$\begin{aligned}
 s_P(\alpha, \varphi) = & (a_1 + \frac{b_1}{15} + \frac{c_1}{3}) \\
 & + \frac{1}{15}(16b_1 - 10c_1)(\cos \alpha + \cos^2 \alpha) \\
 & - \frac{8}{5}b_1(\cos^3 \alpha + \cos^4 \alpha) \\
 & - \sin^2 \varphi \{ (4b_1 - c_1)(\cos \alpha + \cos^2 \alpha) \\
 & \quad - 8b_1(\cos^3 \alpha + \cos^4 \alpha) \} \\
 & + b_1 \sin^4 \varphi \{ 3(\cos \alpha + \cos^2 \alpha) \\
 & \quad - 7(\cos^3 \alpha + \cos^4 \alpha) \}, \quad (9)
 \end{aligned}$$

Hraðinn í einingunum  $m s^{-1}$  er  $V_P = 10^6/s_P$ .

Mynd 3 sýnir  $V_P$  sem fall af stefnuhorni ( $\varphi$ ) og keiluhorni ( $\alpha$ ). Stefnusnaður ís hefur keiluhornið  $\alpha = 90^\circ$ , og stefnubundinn ís þar sem allir ískristallar eru samsíða hefur  $\alpha = 0^\circ$ . Stefnuhornið  $\varphi = 0^\circ$  er lóðrétt, samsíða samhverfuásnum, og  $\varphi = 90^\circ$  er lárétt. Mesti hraði,  $V_P = 4077 m s^{-1}$ , fæst þegar allir kristallar eru lóðréttir og stefnuhornið er lóðrétt. Við mælingar á P-bylgjuhraða í borholum er stefnuhornið  $\simeq 0^\circ$  (ef holan hallast er hornið stærra en  $0^\circ$ ).

Hljóðhraðamælingar í borholum (Taylor, 1982) gefa hraðann  $V_P$ . Með jöfnu 9 getum við lesið keiluhorn úr hraðagögnum. Mælingar á ískjörnum (Anandkrishnan og fleiri, 1994), þar sem einnig er hægt að mæla hraðann í láréttu plani, gefa möguleika á að nota flóknara dreififall ODF. Einnig er hægt að reikna hraðann  $V_P$  út frá stefnum stakra kristalla í þunnisneið og þar af leiðandi jafngilt keiluhorn.

## 2.2. Eigingildisaðferðin, OT

Eigingildisaðferðin sýnir lögun c-ása dreifingarinnar, sjá til dæmis Thorsteinsson og fleiri (1997). Hana má

nota til að finna samhverfuásinn og meta styrk stefnuhneigðarinnar. Þessar upplýsingar fást úr þín sem er myndaður úr þinfeldi (e. tensor product) c-ásanna í Cartesíusar hnitakerfi (e. Orientation Tensor),

$$\mathbf{O} = \sum_{n=1}^N f_n \mathbf{n}_n \otimes \mathbf{n}_n, \quad (10)$$

þar sem  $O_{ij} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = n_i n_j$ ,  $N$  er sem fyrr fjöldi kristalla,  $\mathbf{n}$  stefna c-áss og

$$f_n = A_n^{3/2} / \sum_{j=1}^N A_j^{3/2},$$

er flatarmálshlutfall hvers kristals (e. area fraction) í þunnisneiðinni (Gagliardini og fleiri, 2004). Ef allir kristallarnir eru jafn stórir (eða eru jafngildir) þá eru  $f_n = 1/N$ . Eigingildin  $\lambda_3 \geq \lambda_2 \geq \lambda_1$  og eiginvigrar  $\mathbf{O}$  gefa stærð og stefnu meginása ellipsu sem fellur best að dreifingu c-ásanna. Fyrir stefnusnaudan ís, eru eigingildin öll jöfn  $1/3$ , en  $\lambda_3 = 1$  þegar allir kristallar eru samsíða.

Fyrir keiluhornsdröifingu er stærsta eigingildið,

$$\lambda_3(\alpha) = \frac{1}{3} (1 + \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)). \quad (11)$$

Um hin eigingildin gildir að  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$  og fyrir keiluhornsdröifingu höfum við að auki að  $\lambda_1(\alpha) = \lambda_2(\alpha)$ .

## 2.3. Styrkur stefnu, R

Í þessari aðferð er styrkur stefnu fenginn með vigursummu allra  $N$  c-ásanna ( $\mathbf{n}$ , jafna 1),

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^N f_i \mathbf{n}^i, \text{ og } R = |\mathbf{r}|, \quad (12)$$

sem lýsir stefnuhneigðinni með lengd  $R$  og stefnu  $\mathbf{r}$ . Til að reikna styrk stefnunnar,  $R$ , sem fall af keiluhorni, þarf aðeins að leggja saman lóðréttu þætti c-ásanna, þar sem dröifing c-ásanna er samhverf um lóðrétt samkvæmt skilgreiningu.

Samkvæmt skilgreiningu okkar á keiluhorni er gert ráð fyrir því að c-ásarnir séu jafndreifðir innan keilunnar (e. uniform distribution). Flatarmál keilunnar, sem jafngildir fjölda kristalla fyrir samfellda dröifingu, er

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi(1 - \cos \alpha), \quad (13)$$

og summa lóðréttra þátta er,

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\pi}{2} (1 - \cos 2\alpha). \quad (14)$$

Styrkur stefnunnar er,  $R = S/A$ , svo

$$R = \frac{1}{4} \left[ \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 - \cos \alpha} \right]. \quad (15)$$

Þegar allir kristallarnir eru lóðrétir er  $R = 1$  og ef dreifing  $c$ -ásanna er stefnusnaud er  $R = 1/2$ .

Þegar dreifing  $c$ -ásanna er flöt (sjá mynd 2), fæst að  $R_f = \sin \beta / \beta$ , þar sem  $\beta$  er hámark hornsins frá lóðlínu. Við sjáum að  $R_f(\beta = 90^\circ) = 2/\pi$ , en það er sama gildi og fæst fyrir keiluhorn að stærð  $\alpha = 74^\circ$ . Finna má jafngilt keiluhorn fyrir öll gildi  $\beta \in [0^\circ, 90^\circ]$ .

#### 2.4. Ákvörðun keiluhorns, CAF

Stærð keiluhorns er oft ákvörðuð með með skilyrði um að  $\sim 90\%$  allra mældra kristalla liggja innan þess, (aðferð þessi er kölluð „Cone Angle Fit“, sjá t.d. Anandakrishnan og fleiri (1994)). Þessi aðferð er ónákvæm þar sem ekki er tekið tillit til dreifingar kristallanna og örfáir kristallar sem liggja utan meginþéttleikans geta haft veruleg áhrif á stærð keiluhornsins.

Augljóst er að fyrir fullkomna keiluhornsdreifingu verður keiluhornið sem fæst með þessari aðferð alltaf minna en efni standa til, skv. skilgreiningu.

#### 2.5. Aflögunarhraði, $\dot{\epsilon}$

Út frá dreifingu stakra  $c$ -ása má reikna aflögunarhraða fyrir safn þeirra,  $\dot{\epsilon}^s$ , með því að nota til dæmis líkanið sem lýst er í Thorsteinsson (2001, 2002). Fyrir keiluhornsdreifingu eru til greiningarlausnir fyrir einföld spennusvið. Þær jöfnur eru leiddar út í Thorsteinsson (2001). Þar er gert ráð fyrir að spennan á hverjum kristalli sé jöfn spennu sem beitt er á allt safnið; líkan sem gjarnan er kennt við Sach's.

Fyrir lóðrétta samþjöppun (UC) fæst að aflögunarhraði í lóðrétta stefnu er,

$$\dot{\epsilon}_{UC}^\alpha = \frac{2}{9} \mathcal{A} \sigma^3 \cdot \left[ \frac{\cos^5 \alpha (35 \sin^4 \alpha + 20 \sin^2 \alpha + 8) - 8}{8(\cos \alpha - 1)} \right], \quad (16)$$

og í skerspennu (SS),

$$\dot{\epsilon}_{SS}^\alpha = \mathcal{A} \sigma^3.$$

$$\left[ \frac{2730 \cos \alpha - 35 \cos 3\alpha + 357 \cos 5\alpha - 15 \cos 7\alpha + 35 \cos 9\alpha - 3072}{3072(\cos \alpha - 1)} \right], \quad (17)$$

þar sem  $\mathcal{A}$  er fall af hitastigi (Glen, 1958).

Aflögunarhraða sem er reiknaður út frá stefnu stakra kristalla,  $\dot{\epsilon}^s$ , má þá bera saman við hraða reiknaðan sem fall af keiluhorni,  $\dot{\epsilon}^\alpha$ , til að finna viðeigandi keiluhorn.

### 3. Samanburður á aðferðum

Til að bera þessar mismunandi aðferðir saman er keiluhornið  $\alpha$  sem hver þeirra gefur skoðað. Við höfum þó engar upplýsingar um hvaða gildi  $\alpha$  er réttast. Þess vegna notum við keiluhorn, reiknað frá stefnum stöku kristallanna eða mældum hljóðbylgjuhraða, til að reikna aflögunarhraða í samþjöppun (UC) og skerhreyfingu (SS). Aflögunarhraði er líka reiknaður út frá stefnu stöku kristallanna. Þessir tveir aflögunarhraðar  $\dot{\epsilon}^\alpha$  og  $\dot{\epsilon}^s$  ættu að vera sem líkastir.

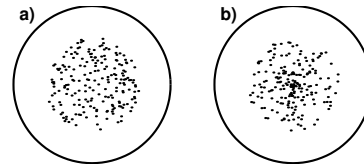
Við skilgreinum skekkju  $e$  til að meta hversu nálægt aflögunarhraði sem byggir á keiluhorni er þeim sem reiknaður er út frá stöku kristöllum,

$$e(\%) = |\dot{\epsilon}^\alpha / \dot{\epsilon}^s - 1| \cdot 100. \quad (18)$$

Til að prófa aðferðirnar búum við til þunnarneiðargögn. Við notum keiluhornsdreifingu, flatadreifingu og kósínusdreifingu. Fyrir keiluhornsdreifinguna ættum við að fá sama horn út og því lítið  $e$ , en þó verður að athuga að með endanlegum fjölda kristalla fæst ekki fullkomin dreifing með slembihætti. Fyrir hinar dreifingarnar ættum við einnig að fá lítið  $e$  ef aðferðin virkar sem óháð mat á styrk stefnuhneigðar.

Keiluhorn sem aðferðirnar gefa eru sýnd í töflu 1 fyrir keiluhornsdreifingu með  $\alpha = 50^\circ$  (mynd 4a) og flata dreifingu með  $\beta = 50^\circ$  (mynd 4b).

Reikningar fyrir mismunandi horn ( $\alpha$  og  $\beta$ ) sýna að keiluhornin eru nánast alltaf fundin rétt þegar upphaflega dreifingin er keiluhornsdreifing, eins og við mátti búast. Hins vegar er erfiðara að finna, eða réttara sagt, að skilgreina hvað er rétt keiluhorn fyrir flata dreifingu og kósínusdreifingu  $c$ -ása og því berum við saman aflögunarhraða en ekki horn.



**Mynd 4.** Punktgröf fyrir 200 kristalla. a) keiluhornsdreifing og b) flöt dreifing  $c$ -ása. Með aðeins 200 kristalla sýni fæst ekki fyllilega einsleit dreifing með slembiúrtaki.

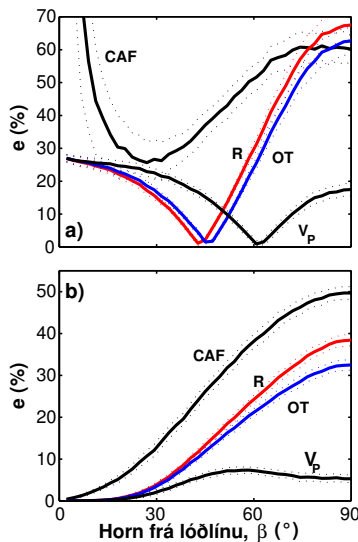
**Tafla 1.** Keiluhorn reiknuð með mismunandi aðferðum út frá keiluhorns- og flatri dreifingu fyrir 200 kristalla sýni.

	Keiluhorns- dreifing $\alpha = 50^\circ$	Flöt dreifing $\beta = 50^\circ$
$\alpha_{UC}$	50.9°	39.1°
$\alpha_{SS}$	52.3°	35.1°
$\alpha_{OT}$	49.6°	40.5°
$\alpha_R$	50.0°	41.1°
$\alpha_{CAF}$	47°	45.0°
$\alpha_{V_P}$	50.8°	37.8°

Mynd 5 sýnir skekkju  $e$  fyrir mismunandi gildi á  $\beta$ , hámarkshorninu frá lóðlínu, fyrir kósínusdreifingu  $c$ -ása, fyrir hinar mismunandi aðferðir í þjöppun (UC) og skerhreyfingu (SS).

Tölfræðilegu aðferðirnar virka ekki mjög vel, skekkjan er stór, en hljóðhraðinn  $V_P$  gefur ágætari niðurstöður. Skekkja innan við 30% í samþjöppun og enn minni (<10%) í skerhreyfingu er lítil miðað við aðrar óvissur í flæðilögmálinu fyrir ís.

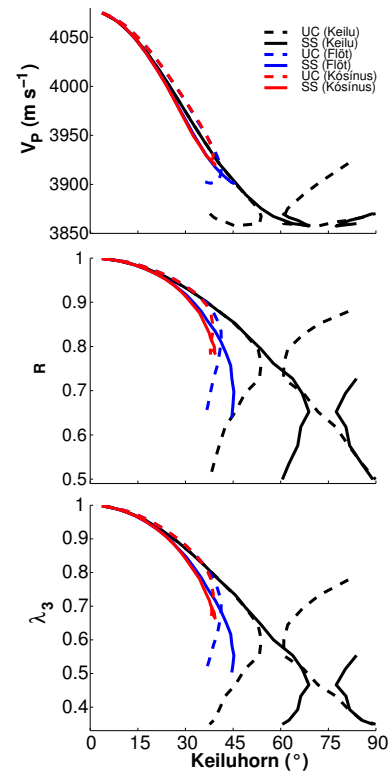
Enn betri mynd af eiginleikum þessara aðferða fæst með því að skoða hvernig keiluhornin sem fást frá aflögunarhraða breytast með spennuástandi og breytingu á dreifingu  $c$ -ása. Fyrir gefið gildi á  $V_P$ ,  $R$  eða  $OT(\lambda_3)$  á góð aðferð að gefa sama keiluhorn,



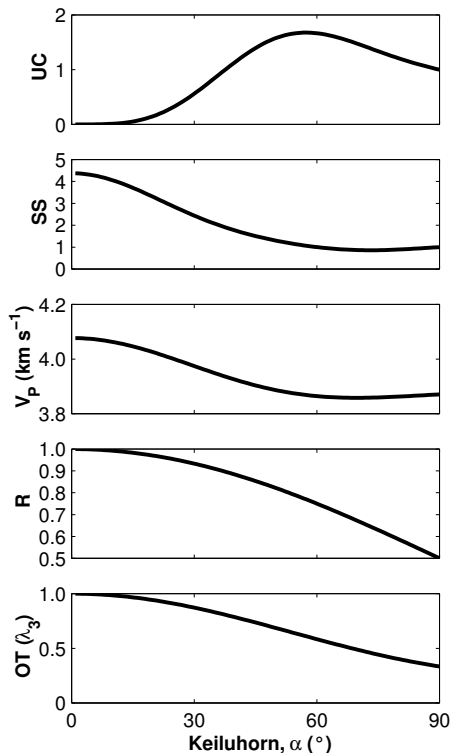
**Mynd 5.** Skekkja í aflögunarhraða fyrir kósínusdreifingu í a) þjöppun (UC) og b) skerspennu (SS). Heilu línurnar eru meðaltal 100 útreikninga og punktalínurnar eru  $1\sigma$  staðalfrávik.

$\alpha$ , óháð dreifingu  $c$ -ása og spennuástandi. Mynd 6 sýnir niðurstöður slíkra útreikninga fyrir hljóðhraða-, styrk stefnu- og eigingildis-aðferðina. Þar sést greinilega að keiluhornið breytist mikið með spennuástandi og dreifingu  $c$ -ása, nema fyrir hljóðhraðann. Einungis aðferðin sem byggir á hljóðhraðamælingum gefur nokkurnveginn sama keiluhorn, óháð spennuástandi og dreifingu  $c$ -ása.

Föllin eru ekki eintæk fyrir stór keiluhorn (mynd 6). Þetta má rekja til fallanna UC, SS og  $V_P$  (mynd 7). Í þjöppun (UC) fæst sama gildi á aflögunarhraða sitthvoru megin við hámarkið við  $\alpha = 57^\circ$  á bilinu  $\alpha \in [38^\circ, 90^\circ]$ , í skerspennu (SS) er lágmark við  $\alpha = 73^\circ$  og sömu gildi fást á bilinu  $\alpha \in [60^\circ, 90^\circ]$  sitthvoru megin við lágmarkið. Fyrir  $V_P$  er einnig lágmark, við  $\alpha = 70^\circ$ , og sömu gildi fást á bilinu  $\alpha \in [56^\circ, 90^\circ]$  sitthvoru megin við lágmarkið.



**Mynd 6.** Hljóðhraði,  $V_P$ , styrkur stefnu,  $R$ , og eigingildisaðferðin,  $OT$ , sem fall af keiluhorni fyrir tvennskonar spennuástand, lóðrétta samþjöppun (UC) og skerspennu (SS), og þrennskonar dreifingu  $c$ -ása, keiluhorns- (Keilu), flata dreifingu (Flöt) og kósínusdreifingu (Kósínus).



**Mynd 7.** Aflögunarhraði í samþjöppun (UC) og skerhreyfingu (SS), hljóðhraði  $V_p$  ( $\text{km s}^{-1}$ ),  $R$  og  $OT$  sem fall af keiluhorni,  $\alpha$ . Aflögunarhraðinn er normaður með aflögunarhraða einsleits íss ( $\alpha = 90$ ).

#### 4. Niðurstöður

Greinilegt er að þegar „tölfræðilegu“ aðferðunum er beitt ( $R$ ,  $OT$  og  $CAF$ ) geta fáir kristallar sem standa utan meginþyrpinga auðveldlega leitt til stærra keiluhorns, minni styrks stefnuhneigðar.

Skerhreyfing er yfirgnæfandi á flestum stöðum innan jökla fyrir utan svæðin nærri yfirborði og við ísaskil. Við ísaskil, og þar með hæstu punkta á jöklum, þar sem samþjöppun er ríkjandi, eru flestir ískjarnar boraðir. Fyrir flæði jöklanna í heild er því er mikilvægt að þessar aðferðir gefi góða raun þegar reikna þarf aflögunarhraða í skerspennu (SS).

Ljóst má einnig vera, enda þótt  $V_p$ -mælingar séu fljótlegri en mælingar á stefnu  $c$ -ása í þunnisneiðum, að nauðsynlegt er að hafa góða hugmynd um hver dreifing  $c$ -ásanna er, en það fæst einungis með þunnisneiðum.

Í stað þess að þurfa að reikna aflögunarhraða jökla út frá stefnu hvers einasta kristals höfum við séð að

hljóðhraða  $V_p$ -aðferðin gefur góða raun við að meta styrk stefnuhneigðar fyrir aflögun í skerspennu.

#### Þakkir

Verkefni þetta var unnið í samstarfi við E.D. Waddington og C.F. Raymond við University of Washington. Helgi Björnsson las handritið yfir á fyrstu stigum og bætti orðalag mikið. Vinna þessi var möguleg vegna styrkja frá Rannsóknasjóði Íslands og National Science Foundation (OPP-9123660, OPP-9526707, OPP-332 9815136, og OPP-0083132).

#### Heimildir

- Alley, R.B. 1992. Flow-law hypotheses for ice-sheet modeling. *Journal of Glaciology*, **38**(129), 245–256.
- Anandkrishnan, S., J. Fitzpatrick, R.B. Alley, A. Gow og D. Meese. 1994. Shear-wave detection of asymmetric  $c$ -axis fabrics in the GISP2 ice core, Greenland. *Journal of Glaciology*, **40**(136), 491–496.
- Azuma, N. 1994. A flow law for anisotropic ice and its application to ice sheets. *Earth and Planetary Science Letters*, **128**(3-4), 601–614.
- Azuma, N. og K. Goto-Azuma. 1996. An anisotropic flow law for ice-sheet ice and its implications. *Annals of Glaciology*, **23**, 202–208.
- Bennett, H.F. 1968. An investigation into velocity anisotropy through measurements of ultrasonic wave velocities in snow and ice cores from Greenland and Antarctica. *Ph. D. Thesis, University of Wisconsin*.
- Bennett, H.F. 1972. Measurements of ultrasonic wave velocities in ice cores from Greenland and Antarctica. *CRREL Research Report 237*, bls. 1–61.
- Budd, W. og T. Jacka. 1989. A review of ice rheology for ice sheet modelling. *Cold Regions Science and Technology*, **16**(2), 107–144.
- Castelnau, O., P. Duval, R. Lebensohn og G. R. Canova. 1996. Viscoplastic modeling of texture development in polycrystalline ice with self-consistent approach: Comparison with bound estimates. *Journal of Geophysical Research*, **101**(B6), 13851–13868.
- Chastel, Y. B., P. R. Dawson, H.-R. Wenk og K. Bennett. 1993. Anisotropic convection with implications for the upper mantle. *Journal of Geophysical Research*, **98**(B10), 17757–17771.
- Dawson, P.R. og H.-R. Wenk. 2000. Texturing of the upper mantle during convection. *Philosophical Magazine A*, **80**(3), 573–598.
- Duval, P., M. F. Ashby og I. Anderman. 1983. Rate-controlling processes in the creep of polycrystalline ice. *Journal of Physical Chemistry*, **87**(21), 4066–4074.

- Gagliardini, O., G. Durand og Y. Wang. 2004. Grain area as a statistical weight for polycrystal constituents. *Journal of Glaciology*, **50**(168), 87–95.
- Glen, J.W. 1958. The flow law of ice. Í *Physics of the movement of the ice*, bls. 171–183. International Association of Hydrological Sciences Publication 47.
- Gödert, G. og K. Hutter. 1998. Induced anisotropy in large ice shields: theory and its homogenization. *Continuum Mech. Thermodyn.*, **10**(5), 293–318.
- Gow, A.J., D.A. Meese, R.B. Alley, J.J. Fitzpatrick, S. Anandkrishnan, G.A. Woods og B.C. Elder. 1997. Physical and structural properties of the Greenland Ice Sheet Project 2 ice core: A review. *Journal of Geophysical Research*, **102**(C12), 26559–26575.
- Herron, S. L., C. C. Langway og K. A. Brugger. 1985. Ultrasonic velocities and crystalline anisotropy in the ice core from Dye 3, Greenland. Í *Greenland Ice Core: Geophysics, Geochemistry and the Environment*, Geophysical Monograph 33, bls. 23–31. American Geophysical Union.
- Karato, S. 1993. Inner core anisotropy due to the magnetic field-induced preferred orientation of iron. *Science*, **262**(5140), 1708–1711.
- Kendall, J.M. og P.G. Silver. 1996. Constraints from seismic anisotropy on the nature of the lowermost mantle. *Nature*, **381**(6581), 409–412.
- Kocks, U.F. 1998. The representation of orientations and textures. Í *Texture and Anisotropy*, bls. 45–101. Cambridge University Press.
- Lliboutry, L.A. 1993. Anisotropic, transversely isotropic nonlinear viscosity of rock ice and rheological parameters inferred from homogenization. *International Journal of Plasticity*, **9**(5), 619–632.
- Lliboutry, L.A. og P. Duval. 1995. Various isotropic and anisotropic ices found in glaciers and polar ice caps and their corresponding rheologies. *Annales Geophysicae*, **3**(2), 207–224.
- Morland, L.W. og R. Staroszczyk. 1998. Viscous response of polar ice with evolving fabric. *Continuum Mech. Thermodyn.*, **10**(3), 135–152.
- Nicolas, A. og N.I. Christensen. 1987. Formation of anisotropy in upper mantle peridotites - a review. Í K. Fuchs og C. Froidevaux, editors, *Composition, Structure and Dynamics of the Lithosphere-Asthenosphere System*, Geodynamics Series 16, bls. 111–123. American Geophysical Union.
- Pettit, E.C., T. Thorsteinsson, H.P. Jacobson og E.D. Waddington. 2007. The role of crystal fabric in flow near an ice divide. *Journal of Glaciology*, **53**(181), 277–288.
- Savage, M.K. 1999. Seismic anisotropy and mantle deformation. *Reviews of Geophysics*, **37**(1), 65–106.
- Staroszczyk, R. og O. Gagliardini. 1999. Two orthotropic models for strain-induced anisotropy of polar ice. *Journal of Glaciology*, **45**(151), 485–494.
- Taylor, K.C. 1982. Sonic logging at Dye 3, Greenland. *MS Thesis, University of Wisconsin*, bls. 1–64.
- Thorsteinsson, T. 2001. An analytical approach to deformation of anisotropic ice-crystal aggregates. *Journal of Glaciology*, **47**(158), 507–516.
- Thorsteinsson, T. 2002. Fabric development with nearest-neighbor interaction and dynamic recrystallization. *Journal of Geophysical Research*, **107**(B1), 1–13.
- Thorsteinsson, T., J. Kipfstuhl og H. Miller. 1997. Textures and fabrics in the GRIP ice core. *Journal of Geophysical Research*, **102**(C12), 26583–26599.
- Thorsteinsson, T., E.D. Waddington, K.C. Taylor, R.B. Alley og D.D. Blankenship. 1999. Strain-rate enhancement at Dye 3, Greenland. *Journal of Glaciology*, **45**(150), 338–345.
- van der Veen, C. og I. Whillans. 1990. Flow laws for glacier ice: Comparison of numerical predictions and field measurements. *Journal of Glaciology*, **36**(124), 324–339.

**Summary:** Five different methods to characterize fabric anisotropy are derived in terms of cone angle and compared. They are formulated such that an appropriate cone angle is related to the given distribution of c-axes. When the distribution is not a perfect equal area density (cone angle distribution), and also when the number of crystals is finite, these different methods give different estimates of the cone angle. To assess how well suited each method is for calculating deformation rates, the deformation rate calculated from the single crystal orientations is compared to the deformation rate from the cone angle inferred by the different methods. In uniaxial compression none of these methods works really well when the fabric is different from the equal area distribution. For simple shear the sonic velocity gives the best approximation.

**Um höfundinn:** Pröstur Þorsteinsson lauk B.Sc. námi í jarðeðlisfræði við Háskóla Íslands 1995 og Ph.D.-gráðu frá University of Washington árið 2000 í jarðeðlisfræði. Hann er nú með gestaaðstöðu sem sérfræðingur á Jarðvísindastofnun Háskólans.

---

Pröstur Þorsteinsson  
 Jarðvísindastofnun Háskólans  
 Sturlugata 7, IS-101 Reykjavík  
 ThrosturTh@gmail.com  
 Móttekin: 16. apríl 2007