

# Foucault–pendúll

Ari Ólafsson

Raunvísindastofnun Háskólans

Vefútgáfa: 15. mars 2006

**Ágrip** – Fjallað er um helstu þætti sem hafa áhrif á sveiflu einfaldra pendúla með lítið útslag í tregðukerfum og snúningskerfum. Áhrifum Coriolis-kraftsins á Foucault–pendúl er lýst, fjallað um uppruna og afleiðingar sporbaugssveiflu og leiðum til að viðhalda plansveiflu með föstu útslagi er lýst. Raktir eru helstu hönnunarþættir 25 m hás Foucault–pendúls í höfuðstöðvum Orkuveitu Reykjavíkur.

## 1. Inngangur

Fyrir nokkrum árum voru lesendur tímaritsins Physics World [1], sem gefið er út af bresku eðlisfræðisamtökunum, beðnir um að senda inn tilnefningar um “fegurstu tilraunina í eðlisfræði” (e. “The most beautiful experiment in physics”). Fjöldi tilnefninga barst og lesendur lögðu sjálfsögðu ekki allir sama skilning í hugtakið fegurð. Algengast var að menn vitnuðu til einfaldleika eða áhrifa á hugsun samtíðarmanna.

Flestar tilnefningar hlaut víxlunar–tilraun “Youngs” fyrir rafeindir, sem sýndi óyggjandi að rafeindirnar hafa bylgjueiginleika. Meðal 10 efstu tilraunanna var *Foucault–pendúllinn*. Kynningu á þessum tilraunum með hreyfimyndum má finna á veraldarvefnum [2].

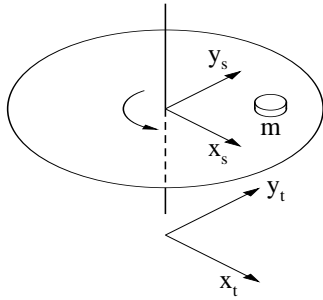
Til marks um þann sess sem Foucault–pendúll hefur í hugum manna má nefna að við opnun aðalbyggingar Sameinuðu þjóðanna í New York árið 1955 afhenti ríkisstjórn Hollands samtökunum slíkan pendúl að gjöf, og prýðir hann anddyri byggingarinnar. Helstu vísindasöfn heimsins og margir háskólar státa af Foucault–pendúl [3].

Með snúningi á sveifluplani einfalds pendúls sýndi Frakkinn Léon Foucault (1819–1868) [4,5,6] fram á að jörðin snýst, án þess að vísa til færslu stjarna á himinhvelvingunni [7]. Þetta var árið 1851 og 68 m há útgáfa af pendúlum í Panthéon hofinu varð helsta sýningaratriði Frakka á heimssýningunni í París sama ár. Hálfri öld seinna mótaði Einstein takmörkuðu afstæðiskenninguna og með henni varð

hugmyndin um jafngildi viðmiðunarkerfa sem hreyfast innbyrðis með föstum línulegum hraða almennt þekkt meðal menntamanna. Allar götur síðan höfum við mátt búa við fullyrðingar á við “öll hreyfing er afstæð”. En snúningur sveifluplans Foucault–pendúlsins í okkar viðmiðunarkerfi sýnir að svo er ekki, enda segir takmarkaða afstæðiskenningin ekkert um jafngildi viðmiðunarkerfa sem snúast innbyrðis. Pendúllinn sveiflast í sínu viðmiðunarkerfi sem ekki fylgir snúningi jarðar þó hann “sjái” ekkert til sólar eða stjarna. Þetta þekkjum við öll af “skollaleik” eða hringekju, þar sem ekki leynir sér að það er “skollinn” eða hringekjan sem snýst svo okkur svimar, en ekki umheimurinn. Viðmiðunarkerfi hringekjunnar er ekki jafngilt viðmiðunarkerfi umhverfisins svo hreyfilögmál eðlisfræðinnar hafa ekki sama form í þessum tveimur kerfum.

## 2. Viðmiðunarkerfi og sýndarkraftar

Hreyfilögmál Newtons gilda fyrir massa sem hreyfast með hraða sem er miklu minni en ljóshraðinn,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$  í viðmiðunarkerfum sem kallast tregðukerfi. Tregðukerfi eru hnitakerfi sem hreyfast með föstum línulegum hraða miðað við “algilda rúmið”. Algilda rúmið er eitt af erfiðustu hugtökum Newtonskrar affræði og tilvist þess hefur oftlega verið dregin í efa. Saga þessa hugtaks er löng og því voru ekki gerð fullnaðarskil fyrr en með almennu afstæðiskenningu Einsteins. Hér látum við okkur nægja að gera ráð fyrir tilvist algilds rúms.



**Mynd 1.** Snúningsskífa og ytra tregðukerfi  $(x_t, y_t)$ . Hnitakerfið  $(x_s, y_s)$  snýst með skífunni.

Skoðum nú skífu sem snýst um samhverfuás sinn með hornhraða  $\Omega$ . Á skífuna setjum við massann  $m$ , og reynum að lýsa hreyfingu hans bæði í ytra tregðukerfi og hnitakerfi sem fylgir snúningi skífunnar. Lítum á þrjú sértilfelli.

- Massinn er kyrr í tregðukerfinu. Enginn lokakraftur verkar á massann svo hröðun hans í ytra tregðukerfinu er  $\mathbf{a}_t=0$ . Í hnitakerfi sem fylgir snúningi skífunnar færir massinn hinsvegar eftir hringferli og virðist því fá hröðun inn að miðju hnitakerfisins sem nemur  $\mathbf{a}_s = -\Omega^2 \mathbf{r}_s$ . Kraftinn  $\mathbf{F}_s = m\mathbf{a}_s$  köllum við sýndarkraft því tilvist hans tengist aðeins snúningi hnitakerfisins.
- Massinn fylgir skífunni. Hér er einfalt að lýsa hreyfingarástandinu í hnitakerfinu sem fylgir snúningi skífunnar,  $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_0$ , þar sem  $\mathbf{r}_0$  er fasti. Í tregðukerfinu færir massinn eftir hringferli með radíus  $r = |\mathbf{r}_0|$  með hornhraðanum  $\Omega$ . Viðnámskraftur milli skífu og massa þarf því að skila hröðuninni  $\mathbf{a}_t = -\Omega^2 \mathbf{r}_t$ .
- Massinn hefur jafnan hraða í tregðukerfinu. Til einföldunar skulum við gera ráð fyrir að á tímanum  $t = 0$  sé massinn á miðju skífunnar með hraðann  $\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_0$ . Hreyfingunni í tregðukerfinu er því lýst með  $\mathbf{r}_t = \mathbf{v}_0 \cdot t$  og massinn fær enga hröðun. Í hnitakerfi skífunnar færir massinn hinsvegar út eftir spírallaga ferli

$$\mathbf{r}_s = v_0 t \cdot (\cos \Omega t, -\sin \Omega t).$$

Hröðunin

$$\mathbf{a}_s = -2\Omega v_0 \cdot (\sin \Omega t, \cos \Omega t) - \Omega^2 \mathbf{r}_s$$

er samsett úr tveimur liðum. Fyrri liðurinn er í stefnu snertils og sér fyrir hraðaaukningunni meðan sá seinni stefnir inn að miðju og sér fyrir krappunum á ferlinum.

Almennt eru tengsl milli krafta í þessum tveimur viðmiðunarkerfum gefin með [8]

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_t - 2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_s - m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_s). \quad (1)$$

Fyrsti liðurinn hægra megin við jafnaðarmerkið lýsir lokakrafti sem verkar á massann í tregðukerfinu en hinir tveir eru sýndarkraftar. Sá fyrri nefnist Coriolis-kraftur og sá seinni miðflóttakraftur. Til leiðbeiningar fyrir lesendur sem eru óvanir að lesa úr vigrjöfnum skal tekið fram að vigrakrossfeldi  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  gefur vigr sem er hornréttur á bæði  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  og hefur lengdina  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \theta$ , þar sem  $\theta$  er hornið á milli  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ . Þannig má lesa úr jöfnu (1) að báðir sýndarkraftarnir eru hornréttir á snúningásinn, því  $\boldsymbol{\Omega}$  stefnir eftir ásnum.

Snúningur lægða í veðrakerfinu og snúningur sveifluplans Foucault-pendúlsins skrifast á reikning Coriolis-kraftsins vegna snúnings jarðar. Miðflóttakraftur vegna snúnings jarðar veldur því að lóðlína stefnir almennt aðeins framhjá miðju jarðar.

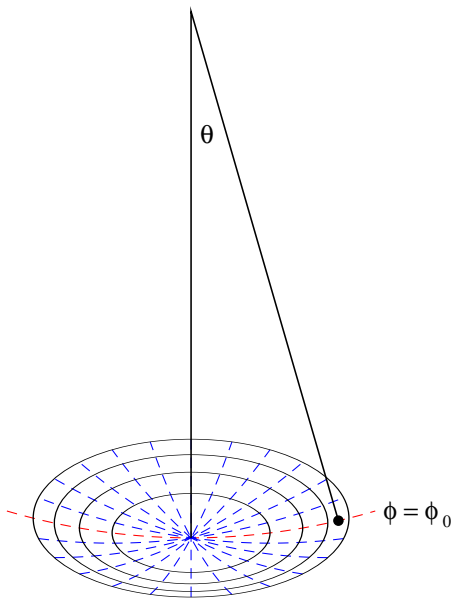
### 3. Einfaldur pendúll í tregðukerfi

Einfaldur pendúll er samsettur af þrenningunni upphengja, strengur og kólfur. Strengurinn heldur kólfinum uppi með því að tengja hann við kyrrstæða upphengjuna. Þegar kólfurinn er kyrrstæður fellur strengurinn að lóðlínu. Við gerum ráð fyrir að strengurinn geti aflagast við upphengipunktinn þannig að hann sé ætíð beinn þaðan til kólfs. Til frekari einföldunar gerum við ráð fyrir að massi strengsins sé hverfandi miðað við massa kólfsins,  $m$ , kólfurinn sé punktmassi og sleppum öllum viðnámsáhrifum.

Á kólfinn verka þá tveir kraftar; þyngdarkraftur  $mg$  í stefnu lóðlínu, þar sem  $g$  er þyngdarhröðun, og togkraftur frá strengnum í stefnu strengsins. Hreyfing kólfsins er nú bundin við kúluflet í fjarlægðinni  $L$  frá upphengjunni. Stöðu á kúlufletinum lýsum við með stórbogavegalengd frá hvíldarstöðu,  $s$ , og áttarhorni (e. azimuth angle),  $\phi$ . Lokakraftur samsíða þessum kúlufleti stefnir alltaf eftir stórbaugnum inn að hvíldarstöðu svo ef við takmörkum okkur við byrjunarstöðuna  $\dot{\phi} = 0$  verður hreyfingin bundin við planið  $\phi = \phi_0$ . Hreyfijafnan fær formið

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0, \quad (2)$$

þar sem  $\theta = s/L$  er hornið sem strengurinn myndar við lóðlínu. Jafna (2) lýsir plansveiflu.



**Mynd 2.** Hreyfing kólfsins er bundin við kúlufliót. Hálfðregnu ferlarnir eru stórbaugar dregnir með  $\Delta\phi = 15^\circ$  millibili. Baugurinn sem kólfurinn fylgir er merktur sérlega. Heildregnu ferlarnir eru jafndreifðir jafnmættisferlar.

Hér er athyglivert að stærðin  $m$  kemur ekki fyrir í jöfnu (2). Hreyfimyndur pendúlsins er þannig óháð massa lóðsins. Fyrir lítil horn  $\theta$  má nálga  $\sin \theta$  með  $\theta$ , eða  $\sin \theta \simeq \theta$ . Þá fæst einföld lausn á jöfnu (2)

$$\theta(t) = \Theta \cos \omega t \quad (3)$$

þar sem  $\Theta$  er hámarkshornútslag pendúlsins og  $\omega^2 = g/L$ . Sveiflutíminn,  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ , er því

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (4)$$

Mikilvægi pendúlsins felst m.a. í því að sveiflutíminn er óháður massa lóðsins og óháður útslagi innan þeirra marka sem nálgunin segir til um.

#### 4. Raunhæfari pendúll

Lýsingin á pendúl sem dregin var upp í síðasta kafla hefur tvo áberandi galla. Sá fyrri tengist forsendu um sívalningssamhverfu um lóðlínuna og eiginleikum strengsins við upphengjuna, þar sem gert var ráð fyrir að strengurinn gæti svignað með hverfandi krapparadíus. Seinni gallinn varðar orkutap í gegnum loftviðnám, sem leiðir til lækkandi útslags með tíma eða númeri sveiflu.

#### 4.1. Frávik frá sívalningssamhverfu

Við ystu hornstöðu pendúls svignar strengurinn við upphengjuna með krapparadíus sem ákvarðast af fjarurstuðli strengsins, þvermáli hans og massa kólfsins sem hann ber. Krapparadíusinn verður minnstur þar sem upphengjunni sleppir og fer síðan stækkandi niður eftir strengnum þar sem form hans nálgast beina línu. Þetta hefur þau áhrif að virkur snúningspunktur pendúlsins verður svolítið fyrir neðan upphengipunktinn, og virk lengd pendúls þannig svolítið styttri en fjarlægð milli upphengju og massamiðju kólfs. Þetta hefur áhrif á sveiflutíðni pendúlsins og þar með einnig lotuna í gegnum breytingar á  $L$  í jöfnu (4). Þessi áhrif vaxa hratt með þvermáli strengsins.

Frávik frá sívalningssamhverfu verða alltaf til staðar í efniseiginleikum strengsins og þvermáli hans. Þessi frávik eru minni fyrir einþáttunga en fjölþáttu strengi. Frávik geta líka tengst upphengjunni sjálfri ef hún spennir ekki jafnt á strenginn allan hringinn eða gefur ekki jafnt eftir í allar áttir. Frávikin valda mismun í virkri lengd pendúlsins fyrir mismunandi áttarhorn  $\phi$  og þar með mismunandi lotu. Lotu- og tíðnibreyting tengist virkri lengdarbreytingu með

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = -\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} \quad (5)$$

Til að fá mynd af áhrifum ósamhverfunnar gefum við há- og lággildum tíðninnar  $\omega$  nöfnin  $\omega_+$  og  $\omega_-$ , og gerum ráð fyrir til einföldunar að  $90^\circ$  millibil sé á milli áttarhornanna sem gefa þessi útgildi tíðninnar. Sveiflum pendúlsins í allar áttir má lýsa með summu sveiflna í þessar tvær grunnstefnur.

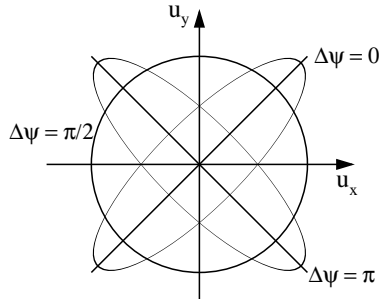
$$\mathbf{s} = s_{x0} \cos \omega_- t \cdot \mathbf{u}_x + s_{y0} \cos \omega_+ t \cdot \mathbf{u}_y \quad (6)$$

þar sem  $\mathbf{s}(t)$  er stöðuvigur kólfsins,  $\mathbf{u}_x$  og  $\mathbf{u}_y$  eru einingarrvigrar í grunnstefnurnar og stærðirnar  $s_{x0}$  og  $s_{y0}$  lýsa útslagi sveifluþáttanna.

Skoðum nú sértílfellið  $s_{x0} = s_{y0}$  sem svarar til sveiflu sem byrjar í stefnu mitt á milli grunnstefnanna. Með tímanum byggist upp fasamunur á milli sveifluþáttanna

$$\Delta\psi = \psi_y - \psi_x = (\omega_+ - \omega_-)t \quad (7)$$

og sveiflan þróast frá því að vera línuskautið í sporbaugsskautun á bilinu  $0 < \Delta\psi < \pi/2$ . Langás sporbaugsins liggur eftir upprunalegu skautunarstefnunni og umferðarstefna á móti úrinu. Fyrir  $\Delta\psi = \pi/2$



**Mynd 3.** Þróun sveifluforms tvítóna pendúls með fasamismun sveifluháttanna. Byrjunarstaðan línuskautun með  $\Delta\psi = 0$  þróast í gegnum sporbaugssveiflu til hringssveiflu ( $\Delta\psi = \pi/2$ ), og þaðan í gegnum aðra sporbaugssveiflu til línuskautunar hornrétt á upphafsstefnuna ( $\Delta\psi = \pi$ ).

verður sveiflan hringsskautuð, þ.e.  $|s|$  er fasti. Á bilinu  $\pi/2 < \Delta\psi < \pi$  þróast sveiflan aftur í gegnum sporbaug til planskautunar en nú liggur langás sporbaugsins hornrétt á upphaflegu sveiflustefnuna. Við  $\Delta\psi = \pi$  er sveiflan orðin línuskautuð hornrétt á upphaflegu skautunarstefnuna. Tilsvarandi þróun verður á bilinu  $\pi < \Delta\psi < 2\pi$  með umferðarstefnu með úrinu.

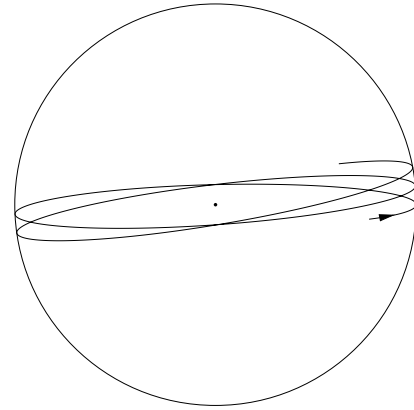
Fyrir aðrar upphafsstefnur ( $s_{x0} \neq s_{y0}$ ) nær sveiflan ekki að verða hringsskautuð og sveiflan verður almennt sporbaugsskautuð. Snúningur á skautunarstefnu við  $\Delta\psi = \pi$  verður  $\Delta\phi < 90^\circ$ . Fjöldi sveiflna sem þarf til að færa pendúlinn frá einu línuskautunar-ástandi til þess næsta er

$$N = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\Delta\omega} = \frac{L}{\Delta L} \quad (8)$$

Hugtakinu skautun er beitt hér vegna náns skyldleika við áhrif tvíbrjótandi efna á skautunareiginleika ljóss [9].

Fyrir Foucault-pendúl eru kröfur um línuskautaða sveiflu stífar þar sem hann fær gildi sitt af snúningi sveifluplansins. Foucault-pendúll þarf því að innihalda deyflið sem hefur hemil á viðleitni til sporbaugssveiflu.

Sporbaugssveifla hefur líka önnur slándi áhrif sem einnig koma fram í tregðukerfum. Með sporbaugssveiflunni er hreyfingin ekki lengur eftir stórbaug kúlufatarins og við þurfum þrjár rúmvíddir til að lýsa ferlinum sem kólfurinn fylgir. Hreyfingin myndar hverfiþunga  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , sem er vigurstærð með breytilega stefnu sem þó er almennt í grennd við lóðlínuna. Stefnubreytinguna má rekja til breytilegra lóðréttra þátta í stærðunum  $\mathbf{r}$  og  $\mathbf{p}$  á ferli kólfsins og



**Mynd 4.** Með sporbaugssveiflu fylgir snúningur sporbaugsásanna. Snúningsstefnan fylgir umferðarstefnu kólfsins eftir sporbaugnum og snúningshraðinn er í réttu hlutfalli við flatarmál sporbaugsins.

koma þessi hrif ekki fram fyrir en í annarri gráðu nálgun í stærðinni  $z/L$ . Frávikshornið við lóðlínuna (stefnu þyngdarkrafts) veldur því að ásar sporbaugsins snúast með hornhraða sem er í réttu hlutfalli við flatarmál sporbaugsins [10].

$$\dot{\phi} = \frac{3}{4} \frac{\pi ab}{L^2} \frac{1}{T} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{g}{L}} \sin \Theta_a \sin \Theta_b \quad (9)$$

Hér tákna  $a$  og  $b$  ásalengdir sporbaugsins og stærðirnar  $\Theta_a$  og  $\Theta_b$  tilsvarandi útslagshorn pendúlsins. Snúningsstefnan samsvarar umferðarstefnu eftir sporbaugnum.

## 4.2. Loftviðnám

Loftviðnám dregur óhjákvæmilega orku úr sveiflunni svo útslagið minnkar með tímanum. Þessi orkuleki er háður formi kólfsins, hraða og útslagi. Áhrif viðnáms á lotu pendúlsins verka til lengingar en eru smávægileg og þar sem sjálf sveiflulotan er ekki í aðalhlutverki hjá Foucault-pendúlum verður ekki fjallað um þá hlið hér.

Algengast er að gera ráð fyrir að viðnámskrafturinn  $\mathbf{F}_v$  sé í réttu hlutfalli við hraðann í öðru veldi.

$$|\mathbf{F}_v| \sim |\mathbf{v}|^2 \quad (10)$$

Hraðinn stjórnast af hönnunarstærðunum pendúllengd  $L$ , og útslagi  $s_0$ , svo með þessum forsendum má tákna orkutap í hverri lotu með

$$\Delta E = \oint \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{s} \sim \frac{s_0^3}{L} = \Theta s_0^2 = \Theta^3 L^2 \quad (11)$$

þar sem  $\Theta$  er eins og fyrr hornútslag pendúlsins. Jöfnur (11) sýna að orkutap í hverri sveiflu er mjög háð útslagi. Til að halda  $\Delta E$  föstu samhliða breytingum á  $L$ , þarf að kvarða  $\Theta$  samkvæmt

$$\Theta \sim L^{-2/3} \quad (12)$$

Gæðastuðull sveiflunnar  $Q$  tengist hönnunarstærðum pendúlsins með

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} \sim \frac{m}{\Theta L} = \frac{m}{s_0} \quad (13)$$

þar sem  $m$  er massi kólfsins. Algeng  $Q$ -gildi fyrir Foucault-pendúla eru á bilinu  $10^3$  til  $10^4$ . Sveiflutíminn nemur því nokkrum klukkustundum.

Þar sem kröfur eru um lengri virknitíma pendúls þarf að koma fyrir örvun af einhverju tagi til að veða upp orkutap vegna loftviðnáms.

### 5. Pendúll í snúningskerfi jarðar

Coriolis-liðurinn í jöfnu (1) veldur hröðun sem er í réttu hlutfalli við hraða kólfsins, með stefnu hornrétt á hraðann, til hægri (á norðurhveli) þegar horft er í hraðastefnuna. Áhrifanna gætir mest í grennd við hvíldarstöðuna þar sem hraðinn er mestur og þau hverfa við ystu stöðu kólfsins þar sem hraðinn verður núll. Hröðunin veldur því að ferillinn, sem kólfurinn fylgir, sveigir til hægri.

Til einföldunar látum við nægja að stilla upp hreyfijöfnum fyrir kólfinn í láréttu plani  $(x, y)$ , sem inniheldur hvíldarstöðuna. Sá þáttur Corioliskraftsins sem liggur í þessu plani ræðst af  $\Omega_z$ , ofanvarpi snúningsvígursins  $\Omega$  á lóðlínuna  $-g$  (sjá mynd 5).

$$\Omega_z = \Omega \sin \Psi \quad (14)$$

þar sem  $\Omega$  er snúningshraðavigur jarðar og  $\Psi$  er breiddarbaugsstaða pendúlsins.

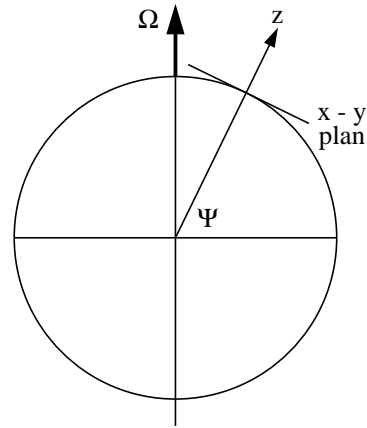
Samkvæmt jöfnu (1) fá hreyfijöfnurnar í  $xy$  planinu nú formið

$$\ddot{x} - 2\Omega_z \dot{y} + \omega^2 x = 0 \quad (15)$$

$$\ddot{y} + 2\Omega_z \dot{x} + \omega^2 y = 0 \quad (16)$$

þar sem  $\omega^2 = g/L$  eins og áður. Með vörpun yfir á tvinntöluplanið,  $(x, y) \mapsto \zeta = x + iy$  má draga jöfnur (15) og (16) saman í eina jöfnu [11]

$$\ddot{\zeta} + 2i\Omega_z \dot{\zeta} + \omega^2 \zeta = 0 \quad (17)$$



Mynd 5. Hnitakerfi pendúls með breiddarstöðu  $\Psi$  á jörðinni.  $\Omega$  er snúningshraðavigur jarðar.

Þessi jafna hefur lausnir á forminu  $\zeta = e^{i\alpha t}$ , þar sem

$$\alpha = -\Omega_z \pm \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} \simeq -\Omega_z \pm \omega \quad (18)$$

Almenna lausn má því skrifa sem

$$\begin{aligned} \zeta &= [Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}]e^{-i\Omega_z t} \\ &= [(A + B) \cos \omega t + i(A - B) \sin \omega t]e^{-i\Omega_z t} \end{aligned} \quad (19)$$

Stærðin innan hornklofans í jöfnu (19) lýsir sporbaugsferli með ása  $a = A + B$  og  $b = A - B$ . Fasabátturinn aftan við hornklofann lýsir Foucault-hrifunum, þ.e. snúningi sporbaugsásanna með hornhraðanum  $\Omega_F = -\Omega \sin \Psi$ . Á norðurhveli jarðar er  $\sin \Psi > 0$  svo Foucault-snúningurinn er réttsælis, en á suðurhveli er  $\sin \Psi$  neikvæð stærð svo snúningurinn er rangsælis. Með þeim byrjunarskilyrðum að kólfurinn er sleppt úr kyrrstöðu við  $\zeta(t = 0) = x_0$  fæst að kólfurinn fylgir ferlinum

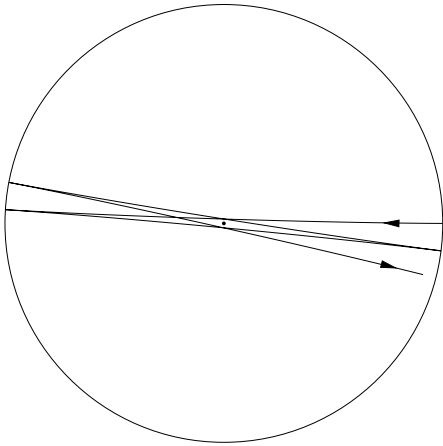
$$\zeta = x_0 \left[ \cos \omega t + i \frac{\Omega}{\omega} \sin \Psi \sin \omega t \right] e^{-i\Omega \sin \Psi t} \quad (20)$$

Þessi ferill er sýndur að hluta á mynd 6. Hann byrjar í stefnu á hvíldarstöðuna en Coriolis-krafturinn sveigir hann til hægri svo hann fer aldrei yfir hvíldarstöðuna. Minnsta fjarlægð frá hvíldarstöðu verður

$$|\zeta|_{min} = x_0 \frac{\Omega}{\omega} \sin \Psi \quad (21)$$

og að lokinni hálfri lotu hefur sveifluplanið snúist sem nemur bogalengdinni

$$\Delta s_{1/2} = \pi x_0 \frac{\Omega}{\omega} \sin \Psi = \pi |\zeta|_{min} \quad (22)$$



**Mynd 6.** Ferill Foucault–pendúls sem sleppt er úr kyrrstöðu við brún hringsins. Coriolis–kraftur vegna snúnings jarðar er stærstur í grennd við hvíldarstöðuna þar sem hraðinn er mestur. Krafturinn veldur krappa á ferlinum (sveigir ferlinn til hægri) svo kólfurinn fer aldrei yfir hvíldarstöðuna. Á myndinni er snúningshraði sveifluplansins stórlega ýktur frá jarðneskum aðstæðum svo hrifin verði skýrari.

Fyrir 25 m háan Foucault–pendúl í Reykjavík ( $\Psi = 64^\circ$ ) með útslag  $x_0 = 1.0$  m taka þessar stærðir gildin  $|\zeta|_{min} = 0.10$  mm og  $\Delta s_{1/2} = 0.32$  mm, og eru þannig vart greinanlegar berum augum.

Í kafla 4.1 kom fram að óumflýjanleg frávik frá sívalnings samhverfu í byggingu pendúls örva sporbaugssveiflu, sem aftur veldur snúningi á sporbaugsásunum samkvæmt jöfnu (9). Snúningur vegna sporbaugssveiflu leggst ýmist við eða dregst frá Foucault–snúningnum eftir umferðarstefnu um sporbauginn. Snúningshraðarnir tveir verða jafnir þegar lengd skammáss sporbaugsins nær markinu

$$b_c = \frac{8}{3} \frac{L^2}{x_0} \frac{\Omega}{\omega} \sin \Psi \quad (23)$$

Fyrir pendúl með kennistærðirnar sem voru tiltekna hér að ofan verða þessi skil við  $b_c \simeq 17$  cm. Foucault–hrifin koma því aðeins óþjögugt fram að skammás sporbaugssveiflunnar sé hverfandi miðað við stærðina  $b_c$ .

## 6. Foucault–pendúll á Íslandi

Fyrir nokkrum árum efndi Orkuveita Reykjavíkur til samkeppni meðal listamanna um listskreytingar í og við hús sitt að Bæjarhálsi, sem þá var í byggingu. Meðal þeirra tillagna sem voru valdar var tillaga



**Mynd 7.** Kólfur og upphengja Foucault–pendúls Orkuveitu Reykjavíkur.

Hreins Friðfinnssonar um Foucault–pendúl. Hreinn leitaði til höfundar þessarar greinar eftir aðstoð við útfærslu pendúlsins.

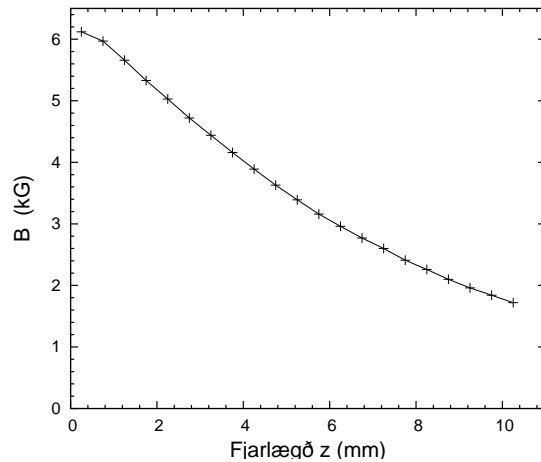
Pendúllinn er í tengibyggingu með glerveggjum og glerþaki þar sem ná má 25 m lofthæð. Upphengju pendúlsins var komið fyrir í burðarvirki þaksins sem er léttbyggð stál-rúmgrind. Strengurinn var valinn einþátta tinhúðaður stálvír af píanógæðum [12], 1.6 mm í þvermál og með togþol  $2000 \text{ N/mm}^2$ . Kólfurinn er samsettur úr tveimur misháum látún-skeilum sem snúa botnflötum saman. Massi kólfsins er  $m = 80$  kg, stærsta þvermál 30 cm og hæð 40 cm. Í topp kólfsins er skrúfuð griptöng í stíl við borpatrónu, sem spennir á strenginn á fjórum íhvolfum flötum. Í neðri brún kólfsins er skrúfaður járnþappi sem heldur 5 cm löngum stafla kröftugra NdBFe segla af N48 gæðaflokki [13]. Þvermál seglanna er 20 mm. Mynd 8 sýnir hvernig segulsviðið breytist eftir samhverfuás staflans með fjarlægð frá staflanum.

Seglastafinn hefur þrjúþætt hlutverk:

- Að spana upp spennumerki þegar kólfurinn fer yfir hvíldarstöðuna, til tímasetningar á örvunarstraumpúlsum.
- Til víxlverkunar við segulsvið sem örvunarstraumpúlssar mynda.
- Að slá niður pinna í jaðri sveiflunnar og skrá þannig ferðasögu sveifluplansins.

Sveiflulota pendúlsins mælist  $T = 10.08$  s, sem svarar til virkrar lengdar  $L = 25.28$  m. Lotuna í snúningi sveifluplansins getum við táknað samkvæmt jöfnu (20) með

$$T_F = \frac{2\pi}{\Omega \sin \Psi} = T_J / \sin \Psi \quad (24)$$



**Mynd 8.** Grafið sýnir hvernig segulsviðið  $B$  frá 5 cm löngum staffa af 20 mm  $\phi$  NdFe seglum (N48) fellur með fjarlægð  $z$  frá staffanum út eftir samhverfuásnum. Vafningar straumspólunnar eru í 5–7 mm fjarlægð frá staffanum.

þar sem  $\Psi = 64^\circ 8'$  er breiddarstaða Reykjavíkur og  $T_J = 23.93$  klst er lota í snúningi jarðar. Þessar kennistærðir gefa Foucault-lotuna

$$T_F = 26 \text{ klst } 36 \text{ min} \quad (25)$$

Færsluhraði sveifluplansins við útbrún sveiflunnar  $x_0 = 1.35$  m er

$$v_F = 2\pi x_0 / T_F = 5.3 \text{ mm/min} = 0.89 \text{ mm/lotu} \quad (26)$$

### 6.1. Örvun

Eins og áður hefur komið fram þarf að örva pendúlinn til að vege upp orkutap vegna loftviðnáms og annars núnings sem kann að vera til staðar. Örvunin má ekki trufla Foucault-hrifin og þarf því að fara fram þegar kólfurinn er nálægt ystu stöðu þar sem hraðinn er lítill. Hér var valið afbrigði af vel þekktri örvunarleið sem byggir á straumspólu sem er sammiðja pendúlsveiflunni með radíus litlu minni en útslag kólfsins [14]. Spólan liggur rétt undir sveifluplani kólfsins, þannig að neðri brún seglastaflans er 5 til 7 mm yfir vafningum spólunnar. Þegar kólfurinn nálgast spóluna á útleið er rafstraumi hleypt á hana. Straumurinn myndar segulsvið sem dregur staffann utar í radíal stefnu. Nálægt ystu stöðu er straumurinn rofinn og ræstur aftur með andstæða stefnu þegar kólfurinn er kominn í sömu stöðu á innleið. Seinni straumpúlsinn



**Mynd 9.** Yfirlitsmynd af Foucault-pendúll Orkuveitu Reykjavíkur. Ytra þvermál spólustokksins er 2.70 m og markar sveifluviðd pendúlsins.

gefur kraft á seglastaflann inn að miðju. Tímasetning straumpúlsanna er miðuð við ræsimerki sem fæst frá lítilli skynjaraspólu þegar seglastaflinn fer yfir miðjuna. Mikilvægt er að tímasetja púlsana samhverft við hreyfingar kólfsins til að minnka áhrif ósamhverfu í smíði spólunnar eða staðsetningu. Við eðlilegt útslag er innri brún segulstafla 5 mm utan við ytri brún spólu í ystu stöðu kólfsins.

Kraftinum sem verkar milli seguls og hvers leiðarastubbs ( $ds$ ) í spólunni er lýst með

$$d\mathbf{F}_B = I \cdot (ds \times \mathbf{B}) \quad (27)$$

Stefna kraftsins  $d\mathbf{F}_B$  er hornrétt á bæði straumbrautina  $ds$  og segulsviðið  $\mathbf{B}$  við leiðarann. Hringlaga straumbraut sem er sammiðja pendúlnum og segulsvið sem stefnir eftir streng kólfsins gefa því radíal kraft inn að miðju eða frá miðju eftir stefnu rafstraumsins.

Með því að heilda yfir þær straumbrautir sem segulsviðið nær til fæst heildarkrafturinn

$$F_B \simeq \frac{\pi}{4} d^2 \rho I B \quad (28)$$

þar sem  $d$  er þvermál seguls,  $\rho$  þéttleiki vafninga í spólunni,  $I$  straumur í spólunni og  $B$  styrkur segulsviðs við vafningana. Orkan sem segulsviðið yfirfærir frá spólu til lóðs þegar segullinn svífur einu sinni yfir spóluna er

$$\Delta E_B \simeq F_B \cdot \Delta y \simeq \frac{\pi \rho}{4} d^2 \Delta y I B \quad (29)$$



**Mynd 10.** Myndin sýnir hvernig vafningum, koparplötum, plastþynnum og fellipinum er komið fyrir á spólustokkunum. Seglastafinn fer hálfur út fyrir stokkbrún.

þar sem  $\Delta y$  er breidd spólunnar. Til þess að vinna upp núningstap þarf stærðin  $\Delta E_B$  að vera jöfn tapi á fjórðungi sveiflu.

Pumpa af þessu tagi er sjálfstillandi gagnvart ofpumpun þar sem nýtnin minnkar ef útslag kólfsins verður stærra en til stöð, því tímasetning púlsanna passar þá ekki við stöðu yfir vafningunum. Á hinn bóginn missir pumpan tókin á kólfinum ef hún er stillt á of lágan straum.

Spólan er vafin með lökkuðum  $0.95 \text{ mm}\phi$  koparvír, 2 samsíðatengd lög með 26 vafningum í hvoru lagi. Vafningarnir sitja á harðviðarstokki úr hlyni og hallar efra borðið til samræmis við halla á braut kólfsins. Breidd spólunnar er  $\Delta y = 28 \text{ mm}$ . Spólan er örvuð með 46 – 49 V spennu, svoltíð breytilegri eftir tíðarfari vegna hitaþenslu í þaki og burðarvirki. Innra viðnám spólu er  $R_L \simeq 3.5 \Omega$  og innra viðnám aflgjafa  $R_I \simeq 0.8 \Omega$ . Straumpörfin til að yfirvinna loftviðnám og alla aðra deyfingu er því ríflega 10 A. Heildarlengd straumpúlsanna fjögurra sem koma í hverri lotu er hinsvegar aðeins 12% sveiflutímans.

## 6.2. Deyfing

Foucault–pendúll safnar upp langtímahrifum af Coriolis–kraftinum og er því langrækinn að eðli. Ef

ekki eru gerðar sérstakar ráðstafanir geymir hann því líka minningar lengi í hreyfimyndi sínu um truflanir sem hann hefur orðið fyrir svo sem árekstra við fellipinna, jarðskjálfta, stórviðri sem hreyfa burðargrind þaksins eða snertingu áhorfenda við strenginn. Kröftugustu langvarandi truflanirnar stafa af frávikum frá sívalningssamhverfu við upphengjuna og því að hún færir með hitaþenslu í þakinu svo lóðlína frá upphengipunkti fellur ekki á miðju straumspólunnar. Örvunarkraftarnir frá straumspólunni verða því ekki í stefnu til eða frá hvíldarstöðu.

Áhrifin af þessum truflunum lýsa sér með þrennum hætti:

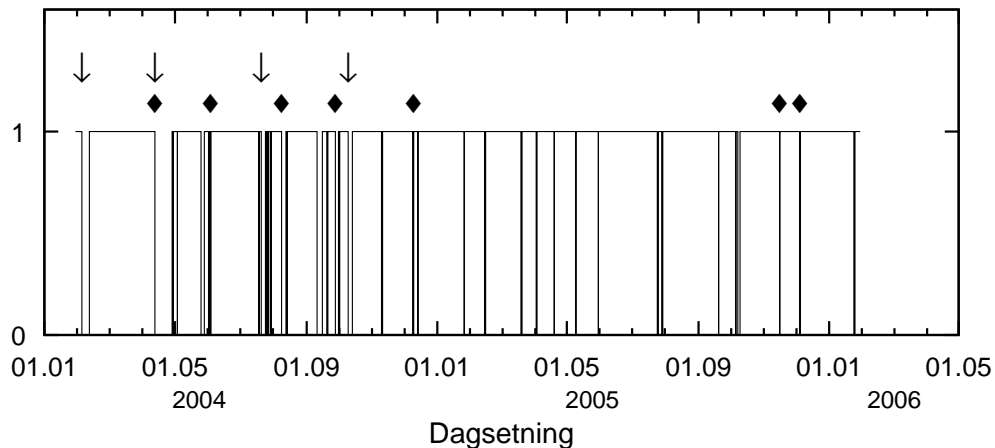
- sem innri sveiflur, kólfurinn vaggar um massamiðju sína
- pendúllinn sveiflast eftir sporbaug
- útslag pendúlsins breytist ef fjarlægð milli seglastafla og straumspólu breytist með hitaþenslu.

Loftviðnám nægir til að deyfa vaggshreyfingar á tímakvarða sem talinn er í mínútum, svo innri sveiflur kalla ekki á sérstakar ráðstafanir.

Sporbaugshreyfingin er hinsvegar alvarlegra mál, samanber umfjöllun í kafla 4.1, sem kallar á mótvægisáðgerðir. Koma þarf fyrir deyfingu, minnstapi um þá krafta sem að baki standa. Deyfingin má ekki trufla Foucault–hrifin frekar en örvunin og þarf því líka að fara fram þar sem Coriolis–krafturinn er hverfandi. Ysta staða kólfsins, við spólustokkinn, er eina staðsetningin sem fullnægir þessu skilyrði. Með deyfingunni er leitast við að minnka skammás sporbaugsins. Hann tengist hraða í snertilstefnu stokksins þegar kólfurinn er í ystu stöðu. Snertilhraðanum þarf að halda í skefjum. Hér er rétt að minna á að Foucault–hrifin gefa engan snertilhraða eins og mynd 6 sýnir.

Deyfingin á þessum pendúl fer fram með tvennum hætti. Ekki er vitað til að þessar leiðir hafi verið reyndar fyrr í tengslum við Foucault–pendúl. Fyrri leiðin felst í að 15 mm breiðum og 3 mm þykkum koparplötum er raðað á spólustokkinn utan við spóluna. Seglastafinn svífur yfir plötunum og spanar upp iðu-rafstrauma í plötunum í réttu hlutfalli við hraða staflans. Þannig yfirfærir segulsviðið orku frá hreyfingu kólfsins til varmaorku í koparplötunum. Hæmlunarkrafturinn á kólfinn er í réttu hlutfalli við hraða hans. Segulhemlar af þessu tagi eru vel þekktir í öðru samhengi, sjá t.d. [15]. Hemillinn deyfir bæði radíal– og snertilhraða kólfsins. Þar sem seglastafinn er breiðari en koparplötunum verkar krafturinn á





**Mynd 11.** Virknilínurit fyrir pendúllinn. Hann fær einkunnina 1 fyrir þau tímabil sem hann sveiflast, og einkunnina 0 þegar hann stoppar. Pílurnar merkja bilun í straumstýringu og tíglaðir skýr ummerki um truflun af mannavöldum.

radíalhraðann meðan skörunin er að breytast, meðan seglastafinn er að svífa inn á plötunna eða út af hinu megin. Í ystu stöðu nær seglastafinn hálfur út fyrir plötur. Í grennd við ystu stöðu getum við táknað radíalhraðann  $v_x$  við frávik frá ystu stöðu  $\Delta x$ , útslag  $x_0$  og hraða við hvíldarstöðu  $v_0$  með

$$\frac{v_x(\Delta x)}{v_0} \simeq \sqrt{\frac{2\Delta x}{x_0}} \quad (30)$$

Pumpan þarf að vega upp orkutap vegna deyfingar á radíalhraða. Hæmlunarkrafturinn á snertilhraðann varir meðan seglastafli og koparplötur skarast.

Hitapenslur í burðargrind þaksins og meðfylgjandi rek á upphengipunkti í lárétta stefnu reyndust meiri en segulbremsan gat ráðið við svo meiri deyfingu þurfti til að tryggja langtímavirkni pendúlsins.

Viðbótardeyfingin fékkst með plastþynnum sem skornar eru úr glærum fyrir myndvarpa. Plastþynnurnar eru festar utan á spólustokkinn á milli fellipinnanna og ná þær vel upp á seglastafinn. Frá þeirri hlið sem vísar upp er klippt upp í þynnurnar á 5 mm millibili svolfíð niður fyrir stokkbrún og þannig myndaðir 5 mm breiðir flipar. Seglastafinn á auðvelt með að sveigja flipana aftur en nágrannafliparnir eru hindrun fyrir snertilfærslu. Plastfliparnir deyfa sporbaugssveifluna kröftuglega þegar miðju seglastafans í ystu stöðu ber við plan þynnu, en síður ef pendúlútslagið er annað.

Lóðréttar hreyfingar þaksins með hitapenslum eru erfiðastar viðfangs. Þær breyta fjarlægð milli segla-

stafla og vafninga og þar með togkrafti pumpunnar. Hér mætti leita lausna í hæðarskynjara fyrir kólfinn sem stjórnar vinnuspennu pumpunnar. En langtíma stöðugleiki á slíku kerfi er dýrkeyptur. Meðan pendúlum fatast aðeins flugið á nokkurra vikna fresti er ekki ástæða til að flækja stjórnkerfið meira.

### 6.3. Fellipinnar

Utan á spólustokkinn er raðað 73 pinnum sem festir eru á lamir þannig að seglastafinn getur slegið þá niður og skráð með því slóð sína. Þar sem pendúllinn slær til beggja átta fellir hann pinna á 11 mínútna fresti og fellir alla pinnana á tímanum  $\tau = T_F/2 = 13$  klst 18 min. Þegar síðasti pinninn er fallinn tekur örtölva við stjórn á loftþrýstiventlum og er pinnunum blásið upp í lóðréttu stöðu aftur einum og einum í einu á sveiflulotu fresti. Uppblásturinn er dreginn á langinn til þess að kólfurinn nái að færa sig frá þeim pinna sem síðast féll áður en honum er blásið upp aftur. Ásgeir Long og Ingólfur Árnason sáu um hönnun, uppsetningu og stýringu á þessum búnaði.

## 7. Lokaorð

Þegar þetta er skrifað eru liðin tvö ár frá því pendúllinn var fyrst gangsettur. Fyrra árið voru gangtruflanir nokkuð tíðar meðan hæfilegra stillinga á straumpúlsnum var leitað og plastþynnum bætt við á þá kafla sem pendúllinn átti í erfiðleikum með. Þá gaf straumstýring sig nokkrum sinnum en þóli nú allt það álag sem

hún fær. Pendúllinn stoppar eftir tveimur mismunandi mynstrum. Fyrri mynstrið er að pumpan missir takid á kólfinum ef fjarlægðin milli seglastafla og vafninga eykst of mikið vegna hitaþenslu. Seinna mynstrið kemur fram ef sporbaugssveifla opnast það mikið að kólfurinn fer ekki yfir skynjaraspóluna í miðjunni og pumpan fær þá ekki ræsimerki. Orsakir sporbaugssveiflunnar geta verið margar, en líklegast er að útslag verði of stórt til að plastþynnurnar virki vel eða að pendúllinn verði fyrir truflun af manna völdum. Mynd 11 sýnir hvernig pendúlnum hefur gengið. Hann fær einkunnina 1 þegar hann sveiflast og einkunnina 0 þegar hann stoppar. Algengt er orðið að hann gangi í 5 til 8 vikur án aðstoðar. En styttri tímabil koma líka fyrir, sérstaklega í kringum umhleyplingar í veðráttu.

Fyrirhugað er að koma upp myndavélum sem verða beintengdar út á veraldarvefinn, svo fylgjast megi með hreyfingum pendúlsins úr fjarlægð á raun-tíma.

### Þakkir

Margir hafa komið að hönnun, smíði og uppsetningu pendúlsins. Auk þeirra sem þegar hafa verið nefndir til sögunnar ber að geta sérlega Kristins E. Hrafnssonar, Ólafs Jónssonar, Reynis Hjálmtýssonar, Harðar Guðmundssonar, Þorsteins Jónssonar, Sigurðar Knútssonar, Helga Þ. Helgasonar, Guðjóns I. Guðjónssonar og Martins Swift. Höfundur kann þeim sem og öllum öðrum sem studdu þetta mál bestu þakkir. Orkuveita Reykjavíkur á hrós skilið fyrir að velja og kosta þennan minnisvarða um afrek raunvísindanna sem listaverk í húsakynni sín.

### Heimildir

- [1] R.P. Crease, The most beautiful experiment. *Physics World* **15**, 9 (2002) 19–20.
- [2] <http://www.physics.nad.ru/Physics/English/top10.htm>
- [3] H.R. Crane, The Foucault Pendulum as a Murder Weapon and a Physicist's Delight. *The Physics Teacher*, maí (1990) 264–269.
- [4] W. Tobin, Léon Foucault, *Scientific American*, júlí (1998) 70–77.
- [5] W. Tobin, *The Life and Science of Léon Foucault: The Man who proved the Earth Rotates*, Cambridge U. Press, 2003.
- [6] A.D. Aczel, *Pendulum: Léon Foucault and the Triumph of Science*. Simon & Schuster Adult Publishing Group, 2003.

- [7] J.B.L. Foucault, *Comptes Rendus, Acad. Sci.*, (Paris), febr. (1851), ensk þýðing: *J. Franklin Inst., 3rd ser.* **21**, (1851) 350–353.
- [8] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics, 3rd ed.*, Addison Wesley, New York 2002.
- [9] E. Hecht, *Optics, 4th ed.*, Addison Wesley, San Francisco 2002.
- [10] J.L. Synge and B.A. Griffith, *Principles of Mechanics, 3rd ed.*, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo 1970.
- [11] J.B. Marion and S.T. Thornton, *Classical dynamics of particles and systems, 4th ed.*, Harcourt Brace & Company, New York 1995.
- [12] Stahl- u. Drahtwerk Röslau GmbH, Röslau Þýskaland [www.roeslau-draht.com](http://www.roeslau-draht.com)
- [13] Neorem Magnets OY, Ulvila Finnland [www.neorem.fi](http://www.neorem.fi)
- [14] [www.abc.net.au/surf/pendulum](http://www.abc.net.au/surf/pendulum)  
[www.physics.uoguelph.ca/foucault/foucault1.html](http://www.physics.uoguelph.ca/foucault/foucault1.html)
- [15] H.D. Young and R.A. Freedman, *University Physics, 11th ed.*, p. 1126, Pearson Education Inc., San Francisco 2004.

**Summary:** The dynamics governing the long term behavior of a simple pendulum with a small displacement are described. The sources and consequences of the Coriolis-effect, asymmetry around the vertical axis, elliptical motion and damping are discussed. The essentials of a 25 m high Foucault pendulum with a 80 kg bob at the headquarters of the Reykjavik Power Company are described. The pendulum is pumped with a concentric currentcoil interacting with a stack of magnets beneath the bob. Damping of elliptical motion is achieved with copper plates around the perimeter acting as magnetic brakes, and with a sequence of thin 5 mm wide plastic strips allowing radial motion but hampering tangential motion at the perimeter. The pendulum records the path of the oscillation plane by knocking down a pin every 11th minute.

**Um höfundinn:** Ari Ólafsson er dósent í tilraunaeðlisfræði við Eðlisfræðiskor Háskóla Íslands með rannsóknaraðstöðu á Raunvísindastofnun Háskólans. Hann hlaut PhD-gráðu frá Kaupmannahafnarháskóla 1990 með sérhæfingu í eðlisfræði leisa og litrófsgreiningu.

---

Raunvísindastofnun Háskólans  
Dunhaga 3, IS-107 Reykjavík  
ario@hi.is

Móttekin: 29.01.06