

# Abel-verðlaunin

Jón Ingólfur Magnússon

Háskóla Íslands

Vefútgáfa: 4. september 2003

**Ágrip** – Í þessari grein er sagt frá Abel-verðlaununum í stærðfræði, sem norska ríkisstjórnin stofnaði til á síðasta ári til minningar um Niels Henrik Abel. Fyrirkomulagi minningarsjóðsins er lýst og ævi og störf Abels eru rakin í stuttu máli. Jafnframt eru fyrsta verðlaunahafanum, Jean-Pierre Serre, gerð nokkur skil.

## Inngangur

Þann 1. janúar 2002 stofnaði norska ríkisstjórnin gildan sjóð til minningar um hinn víðkunna stærðfræðing Niels Henrik Abel. Tilefnið er tveggja alda afmæli þessa einstaka en gæfusnauða snillings, sem fyrst leit dagsins ljós 5. ágúst 1802.

Sjóðnum er falið að verðlauna afburða stærðfræðinga og 3. apríl síðast liðinn var fyrsti verðlaunahafinn útnefndur. Það var Jean-Pierre Serre prófessor emeritus við Collège de France sem fyrstur hreppti hnossíð og tók hann við verðlaununum úr hendi Haralds Noregskonungs í Osló þann 3. júní síðast liðinn. Verðlaunin nema 6 milljónum norskra króna eða um 63 milljónum íslenskra króna.

Mikið var um hátíðahöld og fundi í tengslum við afhendinguna og má þar nefna

- Abel-fyrirlestur sem verðlaunahafinn hélt og nefndi *Frumtölur, jöfnur og módúlarform*,
- að verðlaunahafinn lagði blómsveig að minnisvarðanum um Abel í Hallargarðinum í Osló,
- eins dags Abel-ráðstefnu, sem haldin var við háskólann í Osló,
- mikla veislu sem haldin var í Akershuskastala að viðstöddum norsku konungshjónunum,
- heljarmikið stærðfræðiskrall á Háskólatorginu í miðborg Oslóar, þar sem þátt tóku börn á öllum aldri og verðlaun voru veitt fyrir bestan árangur í tveimur stærðfræðikeppnum, sem fram fara í norskum grunnskólum og kenndar eru við Abel.

Hér á eftir verður stuttlega fjallað um fyrirkomulag og hlutverk sjóðsins og sögð nokkur deili á þeim Niels Henrik Abel og Jean-Pierre Serre.

## Minningarsjóðurinn

Hlutverk sjóðsins er að veita alþjóðleg verðlaun fyrir framúrskarandi vinnu í stærðfræði. Verðlaununum er ætlað að efla veg og virðingu stærðfræðinnar og vekja áhuga barna og ungmenna á henni.

Stofnfé sjóðsins er 200 milljónir norskra króna. Ár hvert skal afrakstur höfuðstólsins renna til Norsku vísinda- og bókmenntaakademíunnar, sem síðan skal reiða fram verðlaunaféð og standa straum af kostnaði við ýmsa atburði í tengslum við verðlaunaaafhendinguna.

Akademían skipar fimm úrskerandi vísindamenn á sviði stærðfræði í svokallaða Abel-nefnd<sup>1</sup>. Nefndarmenn eru skipaðir til tveggja ára í senn og má endurskipa hvern þeirra einu sinni. Hlutverk nefndarinnar er að tilnefna stærðfræðinga til verðlaunanna, en Akademían ákveður hver hinna tilnefndu hlýtur þau. Reiknað er með að verðlaunin verði veitt árlega, en þau ár sem Abel-nefndin finnur engan, sem er verðugur verðlaunanna, skal fénu sem til þeirra var ætlað bætt við höfuðstólinn.

## Niels Henrik Abel

Niels Henrik Abel fæddist á Rogalandi í Noregi, sonur presthjónanna Sörens Georgs Abel og Anne Marie Abel. Faðir hans var ástsæll klerkur sem numið hafði fræði sín í Danmörku. Þar hafði hann gerst sannur upplýsingarmaður og trúði ekki síður á mátt skynseminnar en guð almáttugan. Slíkir kennimenn voru í þá daga nefndir „kartöfluklerkar“ þar sem þeim var ekki

<sup>1</sup> Í reglum sjóðsins er sérstaklega tekið fram að þeir þurfi ekki að vera af norsku bergi brotnir.

síður annst um að söfnuðurinn hefði í sig og á en að hann meðtæki guðsorð með andakt. Hann tók virkan þátt í stjórnámálum umbrotatímanna sem lauk með því að Norðmenn losnuðu undan dönsku oki, hlutu viðurkenningu sem þjóð og samþykktu einhverja frjálsglestu stjórnarskrá álfunnar á Eiðsvöllum 1814. Tvívegis var séra Abel kjörinn til setu á norska stórþinginu. Móðir Nielsar þótti glaðvær kona og gestrisin, en margt bendir til að hún hafi átt við drykkjusýki að stríða<sup>2</sup>.

Abel var svo lánsamur að fá nýjan stærðfræðikennara, Bernt Michael Holmboe (1795–1850), þegar hann var fimmtán ára. Holmboe þessi var afbragðs kennari og jafnframt ágætur stærðfræðingur. Hann var fljótur að átta sig á snilligáfu Abels í stærðfræði og reyndi hvað hann gat til að greiða götu hans enda hélt vinátta þeirra meðan báðir lifðu. Það var ekki bara gæfa Abels sem stærðfræðings að nýr kennari tók við bekknum, því að gamli kennarinn, Hans Peter Bader, virðist hafa verið hinn mesti hrotti. Að hætti ýmissa lélegra uppfræðara lagði hann höfuðáherslu á aga og hirti nemendur óspart. Svo skörulega gekk hann fram í hirtingum sínum að einn nemenda lést af þeim sökum. Var hann þá látinn hætta störfum.

Á næstu árum þroskast Abel stærðfræðilega með undraskjótum hætti. Framan af undir handleiðslu Holmboes, en fljótlega vex hann kennara sínum yfir höfuð. Aðeins 16 ára gamall er hann farinn að lesa Newton, Euler og Lagrange og ári síðar hið sígilda meistarastykki *Disquisitiones Arithmeticae* eftir Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Nokkrum árum síðar þegar Abel var inntur eftir því hvernig honum hefði tekist að komast í fremstu röð stærðfræðinga á svo skömmum tíma, þá svaraði hann: *Með því að lesa meistarana sjálfa, en ekki lærisveina þeirra*. Fyrstu rannsóknaverkefni Abels fólust reyndar í því að bæta verk fyrirrennara sinna, laga sannanir sem ekki stóðust o.s.frv.

Fyrsta stórafrek hans í stærðfræði varðar algebrulega lausn á almennu 5. stigs jöfnunni. Þetta mikilvæga óleysta verkefni hafði skipað veglegan sess í stærðfræðinni um aldir og margir öflugir stærðfræðingar reynt að varpa ljósi á það. Verkefninu er auðvelt að lýsa.

*Margliðujafna af stigi  $n$  með rauntölustudlum er jafna af gerðinni*

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

þar sem  $n$  er jákvæð heiltala og  $a_0, \dots, a_n$  eru gefnar rauntölur; kallaðar *studlar* jöfnunnar. Að *leysa* slíka jöfnu *algebrulega* felst í því að finna formúlu fyrir lausnir hennar (þ.e.a.s. öll gildi á  $x$  sem fullnægja jöfnunni) og skal formúlan fengin út frá stuðlum með *endanlega* mörgum aðgerðum, sem hver um sig er annaðhvort *samlagning*, *margföldun*, *frádráttur*, *deiling* eða *rótarútdráttur*.

Til dæmis hefur almenn fyrsta stigs jafna

$$ax + b = 0$$

lausnaformúluna  $x = -\frac{b}{a}$ , og almenn annars stigs jafna

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hefur lausnaformúluna

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Svipaðar formúlur, en þó verulega snúnari, eru síðan til fyrir almennar þriðja og fjórða stigs jöfnur

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ og } ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Þessar formúlur höfðu verið þekktar í þrjár aldir þegar Abel fór að leita að lausnaformúlu fyrir almennu 5. stigs jöfnuna

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0.$$

Á þessu langa tímabili höfðu menn öðlast mun betri skilning á margliðujöfnum og ýmsir þekktir stærðfræðingar lagt þar hönd á plóg, en merkasta framlagið er líklega sönnun Gauss á undirstöðusetningu algebrunnar, sem segir að sérhver margliða af jákvæðu stigi yfir tvinntölurnar hafi lausn<sup>3</sup>. Ráðgátan um almenna lausnaformúlu á 5. stigs jöfnunni var löngu orðin víðfræg, en hvorki gekk né rak að finna hana, þótt margir hefðu reynt.

Í fyrstu atrennu hélt Abel sig hafa fundið formúluna og með hjálp Holmboes kom hann útleiðslunni til virts dansks stærðfræðings, sem til allrar hamingju

<sup>2</sup> Um þetta er aðeins getið í norskum heimildum svo óþarflega djúpt gæti verið tekið í árinna í þessum efnunum.

<sup>3</sup> Gauss sannar þetta í doktorsritgerð sinni sem hann varði við háskólann í Helmstädt 1799.

bað um nánari útskýringar. Þær fékk hann hins vegar aldrei enda var útleiðslan röng.

Abel vinnur svo það þrekvirki að sanna að almenna 5. stigs jafnan er ekki leysanleg í þeim skilningi sem að ofan greinir, en niðurstaðan er ekki birt fyrir en 1824 og það á kostnað höfundar!

Árið 1821 lýkur Abel stúdentsprófi og hefur nám við háskólann í Kristjaníu (síðar Osló). Stuttu áður hafði faðir hans fallið frá og elsti bróðir hans lagst í þunglyndi. Hann átti því fyrir móður og sex systkinum að sjá og reyndist honum það ætíð ofviða.

Að öllum líkindum er nýstúdentinn Abel lærdæsti stærðfræðingur Noregs á þeim tíma. Hann tekur inntökupróf í háskólann, eins og þá var skylt, og skarar ekki fram úr í öðrum greinum en stærðfræði. Ljóst er að Abel hafði hvorki áhuga á guðfræði, lækisfræði né lögræði og háskólinn bauð ekki upp á gráðu í náttúruvísindum svo ekki var um auðugan garð að gresja þegar háskólanámið hófst. Hann heldur áfram að mennta sig sjálfur í stærðfræði og 1823 birtir hann fyrstu fræðigreinar sínar í *Magazin for Naturvidenskaberne*, sem þá var fremsta vísindatímarit Noregs. Fornvinur Abels og fyrrum kennari, Holmboe, styrkti hann fjárhagslega og svo gerðu einnig ýmsir af prófessorum háskólans. Þessum mönnum var ljóst sem og háskólafyrirvöldum að Abel þyrfti að komast til frekari mennta utan Noregs. Mestu stærðfræðisetur álfunnar voru þá París, sem státaði af l'École Normale, l'École Polytechnique og la Sorbonne, og Göttingen þar sem ríkti hinn mikli Karl Friedrich Gauss. Vegna fjárskorts sat Abel hins vegar fastur í Kristjaníu í 4 ár.

Hann komst þó til Kaupmannahafnar sumaríð 1823 til að kynna þarlandum stærðfræðingum. Þeirra fremstur og að margra mati helsti stærðfræðingur Norðurlanda í þá tíð var Ferdinand Degen. Abel bjó hjá móðursystur sinni og manni hennar. Hann tók þátt í félagslífi stúdenta jafnframt því sem hann gerði atögu að síðustu setningu Fermats og hóf rannsóknir sínar á elliptískum föllum, en framlag hans til þeirra fræða er eitt það merkasta sem eftir hann liggur, og verður vikið að því síðar. Fleira dró til tíðinda þetta sumar því þarna kynntist hann hinni nítján ára gömlu Christine Kemp, sem kom ári síðar til Noregs þar sem þau trúlofuðust.

Árið 1824 hlaut Abel styrk til tveggja ára frá norsku ríkisstjórninni. Auk þess var því heitið að hann fengi styrk til annarra tveggja ára til dvalar erlend-

is. Þetta sama ár gaf Abel út á eigin kostnað grein um niðurstöður sínar varðandi lausn á 5. stigs jöfnunni eins og áður er um getið. Greinina skrifar hann á frönsku og þjappar henni saman á sex stuttar síður (væntanlega í sparnaðarskyni). Hún varð því æði illskiljanleg og reyndist honum ekki sá aðgöngumiði að menntasetrum álfunnar sem hann hafði gert sér vonir um. Hann sendi hana nokkrum þekktum stærðfræðingum, þar á meðal Gauss. Sagan segir að mikilmennið hafi ýtt greininni frá sér án þess að líta á hana með orðunum: *Kemur nú ein hörmungin enn*. Ummæli Gauss bárust Abel til eyrna og hafði hann horn í síðu Gauss upp frá því. Á ferðum sínum um Evrópu sneiddi Abel hjá Göttingen, og er það mikill skaði að þessir afburða stærðfræðingar náðu aldrei að krunka saman um sitt fag, bæði þeirra sjálfra vegna sem og stærðfræðinnar. Það verður þó að virða Gauss til vorkunnar í þessu máli að alls kyns jólasveinar töldu sig hafa leyst verkefnið og sendu þekktum stærðfræðingum ritsmíðar sínar þar að lútandi. Hann hefur því væntanlega verið búinn að lesa nóg af slíkum samsetningi þegar honum barst handrit frá óþekktum manni norðan úr einhverjum hundsrassi.

Á þessum tíma var Noregur kominn í ríkjasamband við Svíþjóð og fékk Abel flýtt för sinni til menntasetra álfunnar með því að skrifa Karli Jóhanni Svíakonungi bréf og heldur hann af stað í september 1825. Eitt af skilyrðum styrkveitingarinnar var að hann skyldi hefja ferðina með því að heilsa upp á Gauss í Göttingen. Það varð þó ekki af því heldur hélt hann til Berlínar og reyndist það honum gæfurík ákvörðun. Í Berlín kynntist Abel verkfræðingnum August Leopold Crelle (1780–1855), sem hafði brennandi áhuga á stærðfræði og hafði lengi dreymt um að koma á fót þýsku stærðfræðitímariti sem stæðist samiburð við hin virtu frönsku tímarit. Kynni hans af Abel urðu til þess, að hann lét drauminn rætast og fyrsta eintakið kom út 1826. Tímaritið hefur komið út allar götur síðan og er í flokki bestu stærðfræðitímarita heimsins. Það ber heitið *Journal für die reine und angewandte Mathematik* en er í daglegu tali stærðfræðinga oftast kennt við stofnandann Crelle. Ólíkt því sem áður hafði þekkt var tímaritið frá upphafi eingöngu helgað stærðfræði. Það telst því vera fyrsta hreinræktaða stærðfræðitímarit sögunnar. Mest af því sem Abel ritaði á sinni stuttu ævi birti hann hjá Crelle og fyrir þá sök öðlaðist tímaritið fljótt virðingu

og festi sig í sessi sem eitt af fremstu tímaritum álfunnar.

Crelle lagði sig fram við að uppgötva hæfileikamenn í stærðfræði og áttaði sig fljótt á því hvílíkur afburðamaður Abel var þó svo hann skildi ekki nema brot af því sem hann hafði fram að færa. Hann hentist um Berlínarborg með Abel og kynnti hann sem stórkostlega uppgötvun. Oft var hinn sjálfmenntaði svissneski rúmfræðingur Steiner með í för og spaugsamir Þjóðverjar sögðu stundum í gamni sín á milli, að þar færi Adam með syni sína Kain og Abel. Abel eyddi fjórum mánuðum í Berlín og varð dvölin honum mikil upplýfting jafnt í fræðunum sem í félagslífinu.

Fyrsta greinin sem Abel birti í Crelle fjallar um lausnir á 5. stigs jöfnunni og er hún mun ítarlegri en fyrri ritsmíð hans um sama efni. Hann sannar fyrst setningu, sem segir að lausnir margliðujöfnu sem leysa má algebrulega, sé hægt að setja fram með þeim hætti að sérhver rót sem fyrir komi í formúlunni sé rætt fall af lausnum jöfnunnar og ákveðnum einingarrótum. Tökum til dæmis lausnaformúlu 2. stigs jöfnu  $ax^2 + bx + c = 0$ . Þar kemur fyrir rótin  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  og hana er unnt að rita  $\sqrt{b^2 - 4ac} = a(\alpha - \beta)$  þar sem  $\alpha$  og  $\beta$  eru lausnir jöfnunnar. Síðan sannar hann að lausnir almennrar 5. stigs jöfnu geti ekki haft þennan eiginleika. Í greininni sem og í síðari skrifum fjallar hann svo um hvaða margliðujöfnur hafi algebrulegar lausnir og bindur sig þá ekki við 5. stigs jöfnur<sup>4</sup>. Hann öðlast djúpan skilning á viðfangsefninu og má sem dæmi nefna, að hann notar bæði hugtökin *svið* og *ókljúfanleg margliða yfir svið*, þó svo hann gefi þeim ekki nafn. Í fyrsta árgangi tímaritsins eru sjö aðrar ritsmíðar eftir Abel. Meðal annars fjallar hann um tvíliðuraðir og gerir þar rækilega grein fyrir samleitni raðanna. Slík vandvirkni í sönnunum var óvenjuleg á þeim tíma, en einkennandi fyrir Abel. Stærðfræðingar sem voru samtíða Abel, að ekki sé talad um þá eldri, voru flestir býsna „frjálslegir“ í sínum sönnunum og skorti oft þá festu sem krafist er í nútíma stærðfræði. Abel fer því þarna í fámennum hópi siðbótarmanna í þessum efnunum þó svo þar fari fremstur Augustin Louis Cauchy (1789–1857).

<sup>4</sup> Það var franskur stærðfræðingurinn Évariste Galois (1811–1832) sem síðar setti fram merkustu hugmyndirnar í þessum fræðum. Þau ganga nú almennt undir nafninu *Galois-fræði*. Hann þekkti til verka Abels og mat þau mikils. Galois varð enn skammlífari en Abel, því hann féll í einvígi á sínu 21. aldursári.

Abel hafði ferðast með hópi ungra norskra vísindamanna sem flestir lögðu stund á jarðvísindi. Þeir hugðu á rannsóknir í Suður-Þýskalandi, Austurríki, Sviss og Norður-Ítalíu. Það varð úr að Abel slóst í för með þeim enda þoldi hann illa einveru og varð þá þungur í sinni. Hann kemur því ekki til Parísar fyrr en í júlí 1826. Í bréfi heim skrifar hann að nú sé hann kominn í *brennipunkt sinna stærðfræðilegu vona*, en því miður varð Parísardvölin honum ekki sú uppspretta gleði og ánægju sem hann hafði vonast til.

Abel tók á leigu herbergi í borginni og hóf þegar að vinna að sínu merkasta verki, hinni svokölluðu Parísarritgerð. Þar setti hann fram það sem hann taldi vera sínar mikilvægustu hugmyndir, og í október 1826 sendi hann verkið til Parísarakademíunnar, sem þá var án vafa virtasti vettvangur stærðfræði í álfunni. Það ber yfirskriftina *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendentes* og undirskriftin er *par N. H. Abel, Norvégien*. Þetta verk átti síðar eftir að vekja gríðarlega athygli og auka hróður Abels um alla álfuna. Verkið er eitt af höfuðritum stærðfræðinnar og haft er eftir einum helsta sérfræðingi í elliptískum föllum Charles Hermite (1822–1901), sem bæði var prófessor við la Sorbonne og l'École Polytechnique, að með því hefði Abel fengið stærðfræðingum verkefni til næstu 150 ára.

Í ritgerðinni sannar Abel frægustu setningu sína, sem er almennt við hann kennd og kölluð *Abel-setningin*. Hún fjallar um óeiginleg heildi af gerðinni  $\int R(x, y) dx$ , að uppfylltu skilyrði  $Q(x, y) = 0$ , þar sem  $R$  er rætt fall af tveimur breytistærðum og  $Q$  er margliða af tveimur breytistærðum. Slík heildi ganga almennt undir nafninu *abelsk heildi*. Þau eiga upphaf sitt í því að menn vildu geta reiknað óeiginleg heildi af gerðinni

$$\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx,$$

þar sem  $R$  er rætt fall af tveimur breytistærðum og  $P$  er margliða. Þannig heildi eru að sjálfsögðu abelsk heildi með  $Q(x, y) = y^2 - P(x)$ . Þetta er einfalt verkefni ef margliðan  $P$  er af stigi 2 og hefur aldrei valdið stærðfræðingum neinum heilabrotum. Þegar margliðan  $P$  er af stigi 3 eða 4 fást svokölluð *elliptísk* (eða *sporger*) heildi. Þau reyndust býsna snúid viðfangsefni og verður að því vikið síðar. Abelsetningin gefur lýsingu á lausnum abelskra heilda. Hún er alltæknileg og flókin í framsetningu og verður

ekki sett fram hér. Þeim sem hefðu áhuga á að kynna sér hana er bent á frumgerðina í [1, XXV], klassíska framsetningu í [3] og síðan einkar glæsilega nútímalega umfjöllun um hana í [5]. „Alþýðlegri“ útgáfu er svo að finna í [6].

Eitt það merkilegasta við setningu Abels er að inn í lýsinguna á lausnum abelsku heildanna fléttast *genus* (eða *ætt*) jöfnunnar  $Q(x, y) = 0$ , en gildi þess hugtaks varð mönnum ekki ljóst fyrr en svokallaðir *Riemann–fletir* komu til sögunnar<sup>5</sup>. Þegar menn fóru síðar að líta á abelsku heildi sem ferilheildi á Riemann–fletinum, sem jafnan  $Q(x, y) = 0$  skilgreinir í varpsléttunni yfir tvinntölurnar, varð rúmfræðileg merking setningarinnar ljósari og mikilvægi hennar jókst til muna. Er þetta enn eitt dæmi um hversu djúpsær stærðfræðingur Abel var.

Abel-setningin felur meðal annars í sér samlagn-ingarformúlu fyrir elliptísk heildi, en þau eiga rætur sínar að rekja til bogalengdarútreikninga fyrir sporbauga og *hnappheldur* (eða *lemniskötur*). Fyrstur til að gera kerfisbundna úttekt á þessum heildum var ítalski greifinn Giulio Carlo de'Toschi di Fagnano (1682–1766), en Adrien-Marie Legendre (1752–1833) var helsti sérfræðingur á þessu sviði þegar Abel kemur til sögunnar. Eins og áður er sagt þá ganga fræðin út á að kanna eiginleika stofnfalla fyrir föll af gerðinni

$$x \mapsto R(x, \sqrt{P(x)}),$$

þar sem  $P$  er margliða af stigi 3 eða 4 (með ólíkar rætur) og  $R$  er rætt fall af tveimur breytistærðum. Strax árið 1823 fær Abel þá snjöllu hugmynd að líta frekar á andhverfur slíkra falla en föllin sjálf<sup>6</sup>. Þetta olli straumhvörfum í fræðunum, því að and-

<sup>5</sup> Riemann–fletir eru einvíðar víðáttur yfir tvinntölurnar. Þeir eru kenndir við þýska stærðfræðinginn Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866). Þjappaður Riemann–fletur er grannfræðilega séð eins og yfirborð á kúlu með ákveðinn fjölda „handfanga“. Genus flatarins er svo skilgreindur sem fjöldi handfanganna. Hugtakið *genus* er því svokölluð grannfræðileg *óbreyta* (*invariant*). Sé litið fram hjá sérstöðupunktum, þá skilgreinir jafna  $Q(x, y) = 0$  þjappaðan Riemann–flet í varpsléttunni yfir tvinntölurnar. Genus þessa flatar er svo kallaður *genus* jöfnunnar.

<sup>6</sup> Í [2] hefur hinn hressilegi sagnfræðingur Eric T. Bell þau orð um þetta, að Abel hafi spennt kerruna aftan á klárinn í stað þess hafa hana að framan líkt og Legendre hefði gert.

hverfurnar eru mun meðfærilegri föll<sup>7</sup>. Heimkominn frá París birti Abel margar og merkilegar niðurstöður varðandi elliptísk heildi. Þar átti hann í harðri samkeppni við prússneska stærðfræðinginn Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), sem varð helsti sérfræðingur á þessu sviði eftir dauða Abels. Legendre gamli varð þó ekkert súr yfir þessu heldur dáðist að ungu mönnum og ku hafa sagt: *Hvílíkt höfuð hefur þessi ungi Norðmaður*.

Framan af er saga Parísarritgerðarinnar heldur dapurleg. Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) var ritari Parísarakademiunnar þegar ritgerðin barst þangað. Eftir að hafa lesið innganginn fékk hann Legendre og Cauchy ritið í hendur til að meta vísindalegt gildi þess. Verkið reyndist þeim torlesið, ekki vegna þess að það væri illa skrifað heldur sökum þess að það var fullt af nýjum og frumlegum hugmyndum. Legendre var tekinn að gamlast og Cauchy gagntekinn af eigin viðfangsefnum svo hvorugur virðist hafa sinnt því að lesa ritið gaumgæfilega og svo fór að lokum að það týndist. Þegar Abel lést rúmum tveimur árum síðar var hann þess fullviss að það væri að eilífu glatað.

Abel dvelur í París til ársloka 1826, en á þar ekki góða daga. Hann er vansæll, þjáist af hitasótt og hósta og er að öllum líkindum kominn með berkla. Úr bréfum sem hann skrifar vinum sínum má glögg lesa að stærðfræðingarnir í París hafi tekið honum af fullri kurteisni en ekki sýnt honum neinn sérstakan áhuga. Í bréfunum fjallar hann um kynni sín af þeim, og segir þar meðal annars að Cauchy sé einfaldlega klikkaður. Verður því ekki mótmælt hér. Þegar Abel bar að garði hjá Legendre var sá síðarnefndi að stíga upp í léttivagn og hafði lítinn tíma aflögu fyrir Norðmanninn unga. Um hann segir Abel að hann sé afskaplega kurteis en því miður mjög gamall. Það er mat margra að Legendre hefði betur látið vagninn fara og hlustað á hvað Abel hafði að segja um elliptísk heildi, en þau voru þungamiðja í ævistarfi Legendres og hans helsta ástríða.

Abel heldur þessu næst til vana sinna í Berlín, þar sem Crelle býður honum ritstjórastöðu við tímaritið. Abel er hins vegar kominn með heimþrá. Hann afþakkar því gott boð og heldur til Noregs í von um að geta unnið föðurlandi sínu gagn. Heldur var Abel fá-

<sup>7</sup> Hliðstæða við þetta væri að menn hefðu árum saman fengist við andhverfur hornafalla og þá dytti einhverjum það snjallræði í hug að fást frekar við hornaföllin sjálf.

lega tekið við heimkomuna enda þótti hann hafa farið hálfgerða sneypuför; hvorki hitt hinn mikla Gauss né komið neinu á prent í París. Þann skamma tíma sem hann átti eftir ólifaðan stríddi hann bæði við heilsuleysi og fjárskort. Styrkbeiðni hans var hafnað og hann vann fyrir sér með einkakennslu. Til þess að að grynka á skuldum móður sinnar tók hann lán sem honum auðnaðist aldrei að borga. Abel náði þó að skrifa margar merkilegar greinar um algebrulegar jöfnur, elliptísk föll og óendanlegar raðir og hafði Crelle ekki undan að birta þær.

Vorið 1828 rættist lítillaga úr hjá Abel þegar hann fékk afleysingastöðu við háskólann í Kristjaníu. Crelle hélt ótraudur áfram að leita að fastri stöðu fyrir hann í Berlín og var Abel nú staðráðinn í að þiggja slíka stöðu ef hún byðist. Þá um sumarið leit út fyrir að það gengi eftir og dvaldi hann hjá unnustu sinni um sex vikna skeið í Froland, þar sem hún var ráðskona á heimili. Þau sáu fram á að geta gift sig og sest að í Berlín og litu björtum augum á framtíðina. Þetta brást því miður, og Abel vann áfram baki brotnu í Kristjaníu. Um jólin hélt hann aftur á fund unnustu sinnar í Froland og veiktist þá illa. Hann lá rúmfastur í þrjá mánuði og hafði ekki mikið þrek, en náði þó að skrifa stuttan útdrátt úr Parísarritgerðinni sem hann taldi týnda og tröllum gefna. Þrátt fyrir góða aðhlyningu lést hann þann 6. apríl 1829 aðeins 26 ára að aldri.

Skömmu fyrir andlát sitt hafði hann samband við fyrrum féлага sinn úr Evrópureisunni, B. M. Keilhau, sem þá var orðinn kennari við háskólann í Kristjaníu, og bað hann annast unnustu sína. Við það stóð sá ágæti maður svikalaust því einu og hálfu ári eftir andlát Abels gengu þau Christine Kemp í það heilaga og héldu sitt heit meðan bæði lifðu.

Það er grátlegt til þess að hugsa að tveimur dögum eftir andlát Abels berast mikilvæg boð úr tveimur áttum. Annars vegar koma frá París fregnir um að ritgerðin glataða sé fundin og byrjað sé að ausa hana lofi. Árið eftir hlaut svo Abel verðlaun Parísarakademiunnar og rann féð til móður hans. Hins vegar berst hlýlegt bréf frá Crelle þar sem segir að Abel hafi fengið fasta stöðu í Berlín. Þar segir enn fremur að nú komist hann í mildara loftslag og verði meðal vina sem meti hann að verðleikum.

Norðmenn hafa ætíð sýnt minningu Abels mikinn sóma og strax árið 1839 kom út í Kristjaníu heildarútgáfa af verkum Abels, *Oeuvres complètes*, sem

Holmboe ritstýrði. Ekki er þó um fullkomna heildarútgáfu að ræða, því meðal annars er þar ekki að finna hina frægu Parísarritgerð, sem aftur hafði týnst. Hún birtist fyrst í tímariti Parísarakademiunnar 1841. Árið 1881 kom svo út glæsileg heildarútgáfa af verkum Abels, *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*, og önnuðust norsku stærðfræðingarnir Sophus Lie (1842–1899) og Ludwig Sylow (1832–1918) útgáfuna.

Þegar öld var liðin frá fæðingu Abels var mikið um dýrðir í Noregi. Í september var haldin Abelhátíð í Kristjaníu þar sem nokkrum erlendum stærðfræðingum voru veittir heiðursdoktorstitlar. Skáld og listamenn létu til sín taka og sömdu ljóð og kantötur, almennir borgarar héldu boð, stúdentar fóru blysför og konungur blés til stórveislu í Konungshöllinni. Norska myndhöggvaranum Gustav Vigeland var falið að gera minnisvarða um Abel. Hann gerði af honum mikla stytta sem enn stendur á veglegum stalli í Hallargarðinum í Osló. Til stóð að koma á fót Abelverðlaunasjóði, en það rann út í sandinn þegar ríkjasamband Noregs og Svíþjóðar slitnaði. Loks má geta þess að mynd af Abel prýðir norska bankaseðla.

### Jean-Pierre Serre

Hlutskipti Jean-Pierres Serre hefur verið æði ólíkt hlutskipti Nielsar Henriks Abel. Hann fæðist inn í þjóðfélag sem metur hann að verðleikum frá fyrstu tíð, veitir honum úrvalsmenntun og greiðir götu hans í hvívetna. Óneitanlega vaknar sú spurning hverju Abel hefði áorkað hefðu kjör hans verið svipuð.

Jean-Pierre Serre hefur átt langan og einstaklega glæsilegan feril sem stærðfræðingur, og afköstin eru ótrúleg, bæði að magni og gæðum. Árið 1986 gaf Springer út þriggja binda safnrit með verkum Serres fram til 1984, sem bar yfirskriftina *Oeuvres—Collected papers*. Árið 2000 kom svo út fjórða bindið, því ekki hafði maðurinn setið auðum höndum frá 1984. Safnið í heild er hátt í 3000 síður, en að auki hefur Serre ritað 12 einstaklega vandaðar bækur, sem hver um sig hefði nægt til að halda nafni hans á lofti. Til viðbótar við þetta er svo fjöldi málstofufyrirlestra sem gefnir hafa verið út en eru ekki í safnritinu. Þá eru ótalin hin miklu bréfaskipti sem Serre hefur átt við fjölda stærðfræðinga víða um heim. Sem dæmi um þau má nefna að nýlega hóf Franska stærðfræðafélagið að gefa út bækur í nýjum bókaflökki, sem kallast *Documents mathématiques*, og fyrsta bókin í

floknum samanstendur af bréfasíptum Serres við Alexander Grothendieck (1928–). Önnur bókin í þessum flokki er reyndar samantekt af ýmsum málstofu-fyrirlestrum sem Serre hefur haldið. Allt er þetta efni einstaklega vel skrifað, enda löngu orðið ljóst að Serre er einn besti höfundur sem stærðfræðin hefur eignast.

Stærðfræðingar sem sent hafa fyrirspurnir til Serre hafa oft undrast hversu skjóttur hann er til svars og hversu ítarleg og vönduð svör þeir fá við spurningum sínum. Serre er því ekki aðeins einstakur stærðfræðisnillingur heldur einnig eljumaður mikill. Sagan segir að kvöld eitt á stærðfræðiráðstefnu hafi Serre og nokkrir aðrir sest að spjalli yfir björglasi, en við slík tækifæri spretta stundum fram áhugaverðar hugmyndir. Þegar einn úr hópnum reis úr rekkju morguninn eftir sá hann að umslagi hafði verið rennt undir herbergishurðina og þegar hann gáði betur að var þar komið vélritað uppkast af grein eftir hann og Serre. Hvort sem sagan er sönn eða ekki þá þykir hún lýsa því vel hvernig Serre vinnur.

Jean-Pierre Serre fæddist þann 15. september 1926 í bænum Bages í austanverðum Pýreneafjöllum. Hann gekk í menntaskóla í borginni Nimes og stundaði síðan nám við hinn virta École Normale Supérieure í París frá 1945 til 1948. Serre lauk doktorsprófi frá la Sorbonne árið 1951 undir handleiðslu Henri Cartan (1904–). Á þessum árum höfðu Frakkar á að skipa mörgum framúrskarandi stærðfræðingum og var Cartan þar í fremstu röð. Jafnframt hefur hann ætíð þótt afbragðskennari og skrifa flestum öðrum betur um stærðfræðileg efni. Faðir hans Élie Cartan var þó ennþá stórkostlegri stærðfræðingur og vann hann brautryðjendastarf á sviði diffurrúmfræði, sígildrar rúmfræði, grannfræði og Liegrúpufræða. Hann er hins vegar mun torlesnari.

Á þeim árum sem Serre er í doktorsnámi er París sannkölluð Mekka stærðfræðinnar og allar nýjustu hugmyndir greinarinnar eru þar ræddar af fólki með afburðabekkingu. Umhverfið var því hvetjandi, og ekki spillti að leiðbeinandinn var fyrsta flokks. Það er því hughreystandi fyrir unga doktorsnema að fá að vita, að Serre lenti í miklu basli framan af með sína doktorsritgerð. Sjálfur segist hann ekki hafa fundið neitt markvert fyrsta eina og hálfu árið sem hann vann að henni. En þá brast stíflan og úr varð ein merkilegasta doktorsritgerð sem skrifuð hefur verið í stærðfræði. Viðfangsefni hennar er úr algebrulegri grannfræði, en vegur þeirrar fræðigreinar var mikill á þess-

um árum. Mjög lauslega sagt fjallar grannfræðin um samfelldni. Sem dæmi um grannfræðilega spurningu má nefna: *Er unnt að breyta kúlu í kleinuhring með samfelldum hætti (þ.e.a.s án þess að slíta eða rífa)?* Í grófum dráttum gengur svo algebrulega grannfræðin út á að tengja við þá hluti, sem verið er að skoða, ýmiss konar algebrulega gripi, svo sem grúpur og bauga, sem oft er auðveldara að átta sig á en hlutunum sjálfum. Til dæmis er auðvelt að fá svar við spurningunni hér að ofan með aðferðum algebrulegrar grannfræði. Svokallaðar fyrstu samtogunargrúpur kúlunnar og kleinuhingsins eru ólíkar og þar með er svarið *nei*.

Það eru einmitt samtogunargrúpur fyrir kúluhvel sem Serre tekur fyrir í doktorsritgerð sinni. Hann beitir nýlegum tækjum, sem landi hans Jean Leray (1906–1998) hafði þróað, og fær þannig margar mikilvægar niðurstöður. Í síðari heimsstyrjöldinni sat Leray í þýskum fangabúðum í Austurríki. Nokkrir fanganna fengu leyfi til að stofnsetja þar fangaháskóla og gerðu Leray að rektor. Sérgrein hans þá var hlutafleiðujöfnur sem tengjast straumfræði, en hann leyndi því vandlega til að koma í veg fyrir að vera munstraður í vísindadeild þýska hersins. Hann kvaðst vera sérfræðingur í grannfræði, því hann taldi að erfitt yrði að nýta þá grein stærðfræðinnar til manndrápa. Hann vann mikið og gott starf við fangaháskólann, og í stríðslok gaf hann út þriggja binda verk sem bar heitið *Algebruleg grannfræði kennd í ánaud*. Í kjölfarið innleiðir hann svo tvö ákaflega mikilvæg hugtök í nútímastærðfræði, nefnilega *knippi* og *spektralsekvensa* (stundum nefndar *draugalestir* á íslensku). Þessi nýju töl fær svo Serre beint úr afflinum og beitir þeim af svo mikilli kúnt, að það veldur straumhvörfum í algebrulegri grannfræði.

Frá 1948 til 1954 sat Serre í rannsóknastöðum við Centre National de la Recherche Scientifique í París, en sækir svo um stöðu við háskólann í Nancy. Þeir, sem völdu úr umsækjendum, höfnuðu Serre og töldu sig frekar þurfa kennara í tölulegri greiningu. Serre hlaut því ekki stöðuna, en kenndi sem lausráðinn við háskólann í Nancy frá 1954 til 1956. Nokkrum mánuðum eftir að honum var hafnað hlaut hann hins vegar Fieldsorðuna, en það er mesta viðurkenning sem stærðfræðingi getur hlotnast<sup>8</sup>. Er það mál manna í

<sup>8</sup> Takist vel til, er ekki ólíklegt að Abel-verðlaunin öðlist með tímanum þann sess sem Fieldsorðan hefur nú í hugum manna.

Nancy að þar hafi oft tekist betur til við mannaáðningar.

Serre var aðeins 27 ára þegar honum var veitt orðan og hvorki fyrr né síðar hefur jafnungum stærðfræðingi hlotnast sá heiður. Það er því ljóst að þó svo Serre hefði fallið frá á sama aldri og Abel, þá hefði hann komist á spjöld stærðfræðisögunnar sem meiri háttar snillingur. Orðuna hlaut hann annars vegar fyrir hina merku doktorsritgerð en hins vegar fyrir beitingu knippafræði í fágæðri og algebrulegri rúmfræði. Á þessum árum vann hann náið með Cartan og var sú samvinna einkar árangursrík. Í þessu sambandi má geta þess, að í ritgerð um sögu tvinnfallagreiningarinnar eftir þýska stærðfræðinginn Reinhold Remmert (1930–)<sup>9</sup> má sjá millifyrirsögnina *Franska byltingin 1950-1953: Henri Cartan og Jean-Pierre Serre*.

Árið 1956 var Serre gerður að prófessor í algebru og rúmfræði við Collège de France<sup>10</sup> og sat hann í þeirri miklu virðingarstöðu til ársins 1994 þegar hann varð prófessor emeritus. Eins og öðrum prófessorum við Collège de France hefur Serre gefist mikill tími til rannsókna og ferðalaga í tengslum við þær, og hefur hann dvalist við margar af merkustu stærðfræðistofnunum heims um lengri eða skemmri tíma.

Á löngum ferli hefur Serre komið víða við í stærðfræðinni. Hann vann ásamt svissneska stærðfræðingnum Armand Borel (1923–) að rannsóknum á Lie-grúpum, þar sem tæknin sem Serre hafði þróað í doktorsritgerðinni nýttist vel. Eftir þá starfsbræður liggja margar merkilegar niðurstöður. Til dæmis sönnuðu þeir að kúlulhvel af vídd  $2n$  sé ekki unnt að gera að fágæðri víðáttu, nema fyrir  $n = 1$  (talnahvel Riemanns) og hugsanlega  $n = 3$ . Ekki hefur enn fengist greitt úr því hvort unnt sé að gera kúlulhvel af víddinni 6 að fágæðri víðáttu, en nýlega hefur verið sýnt fram á að slík víðáttu sé þá eins óalgebruleg og hugsast getur, þ.e.a.s. hafi engin önnur nærfágúð föll en fastaföllin.

<sup>9</sup> Lærifaðir Reynis Axelssonar.

<sup>10</sup> Án þess þó að hafa gengið úr skugga um það, þá telur höfundur þessara lína, að Serre hljóti að vera með yngstu mönnum sem fengið hafa fasta stöðu við Collège de France. Þessi menntastofnun á sér langa og merkilega sögu. Hún á rætur sínar að rekja til ársins 1530 þegar Francois I skipaði „konunglega fyrirlesara“ í hebresku og grísku vegna þess að Parísarháskóli sinni þessum fræðigreinum ekki. Síðar bættust við fleiri greinar, meðal annars stærðfræði 1545. Stofnunin hefur ætíð notið mikillar virðingar og eru fyrirlestrar þar opnir almenningi.

Serre er án vafa einn helsti sérfræðingur heims í talnafræði og hefur framlag hans á því sviði reynst ómetanlegt. Hann þróaði til dæmis mikið af þeim tækjum sem gerðu breska stærðfræðingnum Andrew Wiles (1953–) kleift að sanna síðustu setningu Fermats.

Eitt af megineinkennum Serres er hversu áhugasamur hann er um alla stærðfræði og nær hann oft að tengja saman svið innan stærðfræðinnar, sem virðast gjörólík. Gott dæmi um þetta er vinna hans við elliptíska ferla, en þá hefur hann fengist við sér til dægurstyttingar um árabíl. Elliptískir ferlar koma víða upp í stærðfræði og þá er hægt að skoða frá ýmsum ólíkum sjónarhornum. Til eru stærðfræðingar sem eyða lungunum úr starfsævinni í að kanna tiltekinn flokk af elliptískum ferlum líkt og aðrir vísindamenn kanna tiltekinn flokk skordýra eða hitakærra örvera. Það hefur Serre hins vegar ekki gert, heldur hefur hann velt ferlunum fyrir sér á ýmsan hátt og er talinn hafa betri heildarþekkingu á þeim en nokkur annar.

Eftirfarandi stutt úrval af öndvegisritsmíðum eftir Serre gefur góða mynd af því hversu fjölhæfur hann er:

- Homologie singulière des espaces fibrés (1951)
- Faisceaux algébriques cohérents (1955)
- Groupes algébriques et corps de classes (1959)
- Corps locaux (1962)
- Cohomologie galoisienne (1964)
- Abelian  $l$ -adic representations (1968)
- Cours d'arithmétique (1970)
- Représentations linéaires des groupes finis (1971)
- Arbres, amalgames,  $SL_2$  (1977)
- Lectures on the Mordell-Weil theorem (1989)
- Topics in Galois theory (1992)

Öll þessi rit eru í stöðugri notkun á viðkomandi fræðasviðum. Hin mikla ritgerð *Faisceaux algébriques cohérents* frá 1955 er sérstaklega lýsandi fyrir Serre. Þarna er hann að skrifa um nýtt efni, nánar til tekið um það hvernig unnt sé að beita knippafræði í algebrulegri rúmfræði. Þrátt fyrir það er greinin svo listilega skrifuð að enn þann dag í dag er hún besta heimildin um efnið, þó svo margir hafi skrifað um það síðan. Ritsmíðin hefur engan veginn látið á sjá og sífellt er vitnað í hana. Svipaða sögu má segja af ritinu *Cohomologie galoisienne* frá 1964, en ensk þýðing þess var endurútfegin í fyrri. Hin yfirlætislausu bók *Cours d'arithmétique* frá 1970 er án efa mest lesin af öllum ritum Serres. Hún virðist við fyrstu sýn



jafn einföld og titillinn *Námskeið í talnafræði* gefur til kynna, en er í raun ríkulegt og snilldarlega skrifað verk. Hún hefur verið þýdd á mörg tungumál og margútgefin.

Jafnframt ritstörfum undir eigin nafni hefur Serre stundað ritstörf undir dulnefni, því hann er einn þeirra stærðfræðinga sem stóðu að baki huldumanninum Nicolas Bourbaki. Forsaga málsins er sú að á fjórða áratug aldarinnar fóru Cartan og André Weil (1906–1998) að ræða saman um það hvernig eðlilegast væri að setja fram setningu Stokes og sanna hana. Í kjölfarið fóru þeir svo að skoða ýmis undirstöðurit stærðfræðinnar og sáu að þar var víða pottur brotinn og mikið verk að vinna. Þeir mynduðu því öflugan hóp stærðfræðinga sem hóf þegar að rita bókaflokk um undirstöður nútíma stærðfræði. Því var haldið leyndu hverjir væru í hópnum og bækurnar voru gefnar út undir dulnefninu Nicolas Bourbaki. Þeir suðu svo saman einhverja fortíð handa Nikulási þessum og sögðu meðal annars að karlinn væri frá borginni Nancago. Sú borg hefur reyndar aldrei verið til, en nafnið er fengið með því að splæsa saman nöfnum borganna Nancy og Chicago; hugdetta sem þeir fengu vegna þess að Weil var á förum frá Nancy til Chicago. Árið 1958 var Weil svo ráðinn til Institute for Advanced Study í Princeton, þar sem hann starfaði til æviloka. Serre gekk til liðs við hópinn 1949 og lét ekki sinn hlut eftir liggja frekar en fyrri daginn. Á ferli sínum hefur frá Bourbaki komið mikið og ágætt safn bóka um flestar undirstöðugreinar stærðfræðinnar, en ekki hefur hann enn sannað setningu Stokes.

Í seinni tíð hefur heldur dregið af hópnum, þó svo hann sé í sífelldri endurnýjun, og innan hans eru menn ekki lengur á eitt sáttir um gildi þess að halda starfinu áfram. Samhliða þessum ritstörfum hefur hópinn staðið fyrir öflugri og víðfrægri málstofu, *Séminaire Bourbaki* í París, þar sem reglulega er fjallað um það sem efst er á baugi í stærðfræðirannsóknum samtíðarinnar. Um ágæti þess framtaks er ekki deilt. Hins vegar hafa margir haft horn í síðu Nikulásar allt frá fyrstu tíð og ólíklegasta fólk talar af mikilli fyrirliðningu um hinn grábölvada búrbakisma. Eitt af því sem Nikulási þessum er legið á hálsi fyrir er hin svokallaða „nýja stærðfræði“ sem tröllreið grunnskólakerfi Vesturlanda um nokkurt skeið og þykir almennt hafa verið til bólvunar. Það fær engan veginn staðist, enda kom nýja stærðfræðin úr smíðju bandarískra kennslufræðinga. Lengi vel hvíldi mikil leynd yfir starfsemi

Bourbakis, en í seinni tíð hafa eldri liðsmenn farið að tjá sig um liðsandann, þælingarnar og vinnubrögðin. Hópur félagsvísindafólks hefur svo fengið áhuga á Nikulási og hann hefur verið meginviðfangsefni að minnsta kosti einnar doktorsritgerðar.

Árið 1985 dvaldi Serre um hríð við rannsóknir og kennslu í Singapur. Þar tóku tveir þarlendir stærðfræðingar, C. T. Chong og Y. K. Leong, við hann merkilegt viðtal sem síðar birtist í *The Mathematical Intelligencer* 1988. Aðspurður um Bourbaki og áhrif hans á stærðfræðina segir hann að Bourbaki hafi haft góð áhrif á stærðfræðina og ekki sé fótur fyrir gagnrýninni sem hann hafi orðið fyrir; bókum Bourbakis hafi aldrei verið ætlað að verða kennslurit í háskólum og því síður í menntaskólum. Áhrifin séu hins vegar minni nú en upp úr seinna stríði þegar Bourbaki var að sýna fram á að unnt væri að skrifa um stærðfræði með skipulögðum og vönduðum hætti. Þetta hafi tekist og sjónarmið Bourbakis orðið ofan á. Nú snúist málið hins vegar einungis um það hvort bækur hans séu vel eða illa skrifaðar. Serre telur að sumar þeirra séu það en aðrar ekki. Hann forðast þó að nefna dæmi, af því að slíkt sé spurning um smekk. Í framhaldi af þessu spyrja þeir svo hvernig stíll sé bestur á stærðfræðiritum. Í ljósi þess að Serre skrifar flestum mönnum betur um stærðfræði er svar hans sérstaklega áhugavert. Hann segir að bestur sé stíllinn þegar skrifað er óformlega en af nákvæmni. Þessi stíll sé hins vegar á fárra færi, en nefnir tvo handhafa Fieldsorðunnar sem ráði við hann, Bretann Michael Atiyah (1929–) og Bandaríkjamanninn John Milnor (1931–). Hann segir síðan að löndum sínum (að honum sjálfum meðtöldum) hætti til að vera full formlegir, en sumir Rússanna séu full ónákvæmir.

Í viðtalinu setur Serre fram athyglisverða kenningu í kennslufræði stærðfræðinnar sem ekki er víst að allir séu ánægðir með. Aðspurður um með hvaða hætti sé best að örva ungt fólk til að leggja stund á stærðfræði og þá sérstaklega í skólum svarar hann blákalt að það eigi að letja ungt fólk til stærðfræðiiðkana, enda sé ekki þörf fyrir svo marga stærðfræðinga. En þá sem þverskallist við og vilji fyrir hvern mun leggja stund á greinina, beri hins vegar að hvetja til dáða og veita góða aðstoð. Hann leggur síðan áherslu á að í stærðfræðikennslu beri að eyða þeim misstillningi að stærðfræðin sé dauð fræðigrein. Þetta megi gera með því að segja frá óleystum verkefnum sem auðvelt sé að lýsa og nefnir þar til tvö dæmi. Annað

er tilgáta Goldbachs<sup>11</sup>, sem segir að sérhver slétt tala stærri en 2 sé summa tveggja frumtalna. Hitt er spurningin um hvort til séu óendanlega margar frumtölur af gerðinni  $n^2 + 1$ . Jafnframt segir Serre að gera skuli nemendum grein fyrir auðskildum setningum úr stærðfræði, þó svo ekki séu tök á að sanna þær. Þar nefnir hann sem dæmi setningu Dirichlets<sup>12</sup>, sem segir að í jafnmunarunu

$$b, a + b, 2a + b, \dots, na + b, \dots,$$

þar sem tölurnar  $a$  og  $b$  eru ósambátta, komi fyrir óendanlega margar frumtölur.

Serre er einnig inntur eftir því hver sé ástæða þess að hann hafi látið til sín taka á svo mörgum ólíkum sviðum stærðfræðinnar. Hann svarar því til að í raun sé þetta samfelldur ferill rannsókna. Eftir að hann lauk doktorsritgerðinni varð honum ljóst að margar af niðurstöðum Cartans og japanska stærðfræðingsins Kiyoshis Oka (1901–1978) yrðu auðskildari ef þær væru settar fram með knippakóhómólógíu. Það leiddi svo til þess að hann fór að beita þessum niðurstöðum á Stein-víðáttur og síðar í varprúmfræði yfir tvinn-tölurnar. Seinna varð honum ljóst að ekki var þörf á fágudum tækjum í varprúmfræðinni; þar nægði að beita algebrulegum tækjum. Þetta leiddi hann svo yfir í „abstrakt“ algebrulega rúmfræði yfir algebrulega lokuð svið. En hví þá að binda sig við algebrulega lokuð svið? Honum fundust endanlegu sviðin ennþá meira spennandi og þá var orðið stutt yfir í talnafræðina. Rétt er að staldra við það sem Serre segir um fágud tæki í varprúmfræði. Árið 1956 birti hann grein sem ber titilinn *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, þar sem hann sýnir fram á gróft sagt að innan ramma varprúmfræði yfir tvinn-tölurnar séu fágud fyrirbrigði sjálfkrafa algebruleg. Greinin gengur almennt undir nafninu GAGA, og setningar á borð við *samkvæmt GAGA sést að...* eða *með GAGA rökum fæst þá...* sjást víða í stærðfræðigreinum.

Spurningin um það hver séu hin miðlægu viðfangsefni algebrulegrar rúmfræði og talnafræði segist hann ekki geta svarað. Hann rifjar upp að

<sup>11</sup> Christian Goldbach (1690–1764) var Prússi, sem var prófessor í stærðfræði og sögu við háskólann í Pétursborg frá 1725.

<sup>12</sup> Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) var þýskur stærðfræðingur sem kenndi við marga evrópska háskóla, en eftir að Gauss lést 1855 hlaut Dirichlet þann virðulega sess er Gauss hafði áður skipað við háskólann í Göttingen.

Grothendieck hafi haft langtímaáætlun fyrir algebrulegu rúmfræðina og kanadíski stærðfræðingurinn Robert Phelan Langlands (1936–) hafi aðra ámóta fyrir *tálkanafræði* (representasjónsteoría), en sjálfur segist hann aldrei hafa haft uppi neinar slíkar áætlanir, ekki einu sinni í smáum stíl. Síðan segir hann: *Um þessar mundir hef ég mest gaman af að telja punkta á algebrulegum ferlum yfir endanleg svið. Þetta er eins konar heimfærð stærðfræði: Maður beitir öllum þeim tölum sem maður þekkir úr algebrulegri rúmfræði og talnafræði ... og samt gengur það ekki alveg upp.*

Rétt er að segja nokkur deili á Grothendieck í þessu sambandi, því eins og áður hefur komið fram áttu þeir Serre mikil samskipti. Hann er án nokkurs vafa einn merkilegasti stærðfræðingur sögunnar, og stundum er sagt að hann sé fremur í ætt við náttúruöflin en mennska menn. Hann hefur umbylt þeim sviðum stærðfræðinnar þar sem hann hefur látið til sín taka og enginn einn maður hefur breytt jafn gersamlega landslagi stærðfræðinnar á 20. öld og hann. Hann hóf feril sinn með því að rannsaka grannvigurrúm, þaðan lá leiðin yfir í hómólógísku algebru og loks í algebrulega rúmfræði, þar sem framlag hans er mest. Hann hlaut Fieldsorðuna 1962. Mikill og öflugur rannsóknahópur í algebrulegri rúmfræði starfaði undir hans stjórn við Institut des Hautes Études Scientifiques og voru afköstin ótrúleg. Jafnframt hafði hann mikil áhrif í þá átt að menn fóru að líta á stærðfræðina sem eina heild frekar en safn ólíkra greina. Þetta ber á góma í viðtalinu við Serre, og aðspurður um það hvernig gangi að mynda heild úr ólíkum greinum stærðfræðinnar segist hann telja að það hafi þegar verið gert.

Grothendieck yfirskyggði sjálfan Serre um árabíl, en fljótlega upp úr 1970 hætti hann störfum við stofnunina því hann taldi sig hafa komist að því að hún tengdist franska hernum. Hann var enda róttækur í stjórnmálaskoðunum og mikill friðarsinni. Í kjölfarið dró hann sig að mestu út úr samfélagi stærðfræðinga og hóf að rækta fisk í tjörnum í Suður-Frakklandi. Frá honum hafa þó komið óbirt handrit sem færri hafa komist í en vildu. Þar er að finna gagnmerkar hugmyndir og hugleiðingar um stærðfræði og er áhrifa þeirra þegar farið að gæta. Fyrir um það bil 15 árum fór að ganga á milli manna ljósrit af sendibréfi frá Grothendieck. Ekki er ljóst á hvern bréfið er stílað, en það er mikið að vöxtum; á annað þúsund vélritaðar síður. Bréf þetta er um margt fróðleg lesning fyrir áhugamenn um stærðfræði, en þar eru sam-

ferðamönnum Grothendiecks og þá sérstaklega fyrrum samverkamönnum hans ekki vandaðar kveðjurnar. Ekki talar nú Grothendieck vel um Serre í bréfinu, en þó sýnu verr um flesta aðra. Hafa sumir það til marks um hversu ágætur maður Serre er.

Ekki verður skilið við Serre án þess að minnst sé á hversu góður fyrirlesari hann er. Á því sviði þykir hann hafa náðargáfu, og samfélagi stærðfræðinga til blessunar hefur hann verið óspar á að nýta sér hana. Hann er þekktur fyrir frábæra yfirlitsfyrirlestra, og segir sjálfur það vera holla iðju sem hafi eft sig í rannsóknnum og oft gefið sér nýjar hugmyndir.

Þegar litið er yfir það sem hér hefur verið skrifað að mætti halda að Serre sé lítillátur maður. Enginn skyldi þó ætla það. Hann er mikill snillingur og fáum er það jafnljóst og honum sjálfum. Svo dæmi sé tekið þá hafði Atiyah það einhvern tíma eftir Serre, að í heiminum væru bara 6 stærðfræðingar sem máli skiptu, hinir væru bara hljómbotn. Atiyah bætti svo við, að Serre hefði ekki tilgreint hverjir hinir 5 væru.

Að lokum skulu hér taldar helstu viðurkenningar sem Serre hafa hlotnast á starfsævinni:

- Fieldsorðan 1954
- Gaston Julia verðlaunin 1970
- Félagi í Royal Society 1974
- Heiðursdoktor frá Cambridge-háskóla 1978
- Heiðursdoktor frá Stokkhólmsháskóla 1980
- Heiðursdoktor frá Glasgow-háskóla 1983
- Balzan verðlaunin 1985
- Steele verðlaunin 1995
- Wolf verðlaunin 2000
- Heiðursdoktor frá Oslórháskóla 2002
- Meðlimur í frönsku, sænsku, bandarísku og hollensku akademíunum.

**Summary** The Niels Henrik Abel Memorial Fund was established on 1 January 2002, to award the Abel Prize for outstanding scientific work in the field of mathematics. The prize amount is 6 million NOK (about 750,000 Euro) and was awarded for the first time on 3 June 2003 to Jean-Pierre Serre, one of the great mathematicians of our time. Serre is an Emeritus Professor at Collège de France. He has made profound contributions to the progress of mathematics for over half a century and is still an active researcher. In this article it is explained how the Memorial Fund works and a brief account of the lives and works of Abel and Serre is given.

## Heimildir

- [1] Abel, N. H., *Oeuvres complètes*, norska ríkið, Kristjánú, 1881.
- [2] Bell, E. T., *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1967.
- [3] Bliss, G. A., *Algebraic Functions*, Dover, New York, 1966.
- [4] Chong, C. T. og Leong, Y. K., *An Interview with Jean-Pierre Serre*, *Mathematical Intelligencer* **8**, nr. 4 (1986).
- [5] Griffiths, P. og Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & sons, New York, 1978.
- [6] Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.
- [7] Oort, F., *Book review of Jean-Pierre Serre: Oeuvres–Collected Papers*, *Nieuw Arch. Wisk.* (4) **9** (1) (1991), 67-72.
- [8] Monastyrsky, M., *Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals*, A K Peters, Massachusetts, 1998.
- [9] <http://www.abelprisen.no>
- [10] <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history>

**Um höfundinn:** Jón Ingólfur Magnússon er dósent í stærðfræði við Háskóla Íslands.

---

Raunvísindastofnun Háskólans  
Dunhaga 3, IS-107 Reykjavík  
jim@hi.is

Móttækin: 15. ágúst 2003